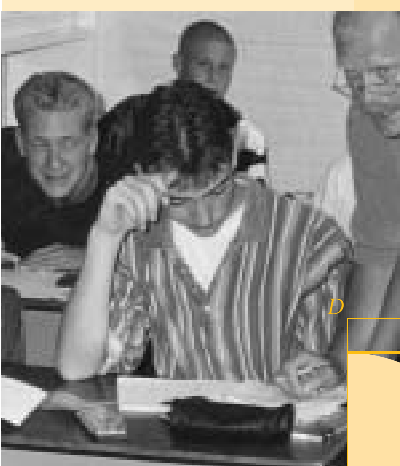
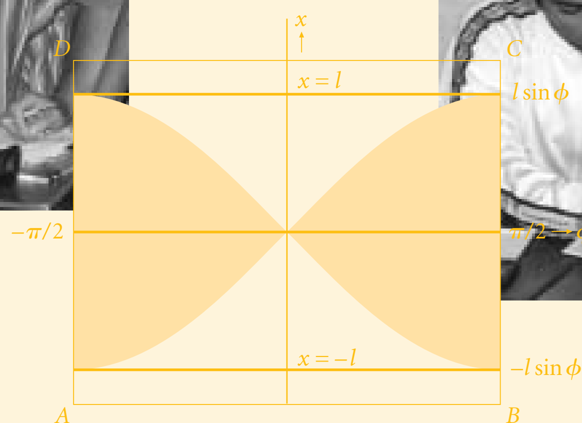
Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 73
1997-1998 oktober
2





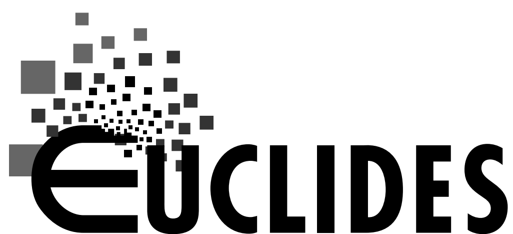






Stand van zaken
Tweede Fase in
september '97

Analyse zonder
afgeleide



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem.

Richtlijnen voor artikelen:
- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.
Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Richtlijnen voor mededelingen:
- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Contributie per ver. jaar: *ƒ* 75,00
Studentleden: *ƒ* 37,50
Leden van de VVWL: *ƒ* 50,00
Lidmaatschap zonder Euclides: *ƒ* 55,00
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: *ƒ* 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: *ƒ* 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor *ƒ* 30,00.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of:
L. Bozuwa, Merwekade 94
3311 TH Dordecht, tel. 078-6390894
fax 078-6390891.

Adresgegevens auteurs

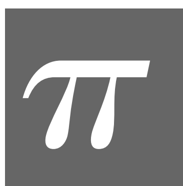
A. van Asch
Benedenmolenweg 3D
4112 NS Beusichem

M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk

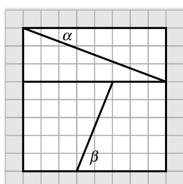
W. Laaper
Waleweinlaan 116
5665 CL Geldrop

G. Zwaneveld
Bieslanderweg 18
6213 AJ Maastricht

Inhoud


42


62



70

van de redactietafel

Vorig schooljaar deed de eerste lichting basisvorming-leerlingen eindexamen vbo/mavo. Doordat het examen aan de makkelijke kant was gehouden, is dat zonder noemenswaardige problemen verlopen. Aan het eind van dit schooljaar zal de eerste lichting basisvorming-leerlingen eindexamen havo doen, zowel wiskunde A als wiskunde B. Of dat, met name bij wiskunde B, even gladjes zal verlopen, is nog maar de vraag. De beroering over de aansluiting derde klas naar vierde klas havo en vwo lijkt wat afgenomen. In juni zal blijken of docenten en leerlingen met veel inspanningen in staat zijn gebleken 'de bocht terug' te maken.

havo/vwo

De regelingen rond wiskunde in de vernieuwde Tweede Fase lijken zo langzamerhand duidelijk te worden. In dit nummer vindt u een overzicht van de huidige stand van zaken. En met huidig wordt bedoeld dd. 1 oktober 1997. Het is een behoorlijk complex geheel geworden, onder andere door de mogelijkheid voor leerlingen om een hogere wiskunde te kiezen en omdat de dubbelkeuze wiskunde A en wiskunde B toch weer, zij het met restricties, wordt toegestaan.
De precieze inhoud van de deelvakken staat ook nog steeds niet helemaal vast. Met name over vwo C&M en vwo N&G/N&T wordt nog beraadslaagd. In het volgende nummer daarover hopelijk het verlossende woord.

vbo/mavo

Steeds duidelijker wordt ook zichtbaar dat de toekomstige veranderingen in vbo en mavo een nog veel ingrijpender operatie zullen worden dan de vernieuwde Tweede Fase havo/vwo. Omdat het *leerplan* wiskunde al in 1993 ingrijpend gewijzigd is, zullen er (gelukkig) op dat gebied geen grote veranderingen te verwachten zijn. In één van de volgende nummers zullen wij u ook op de hoogte stellen van de laatste stand van zaken rond die ontwikkelingen.

Jaarvergadering/studiedag

Op 15 november is wederom de jaarvergadering/studiedag van de vereniging. Daarvoor kunt u zich nog steeds opgeven. In het vorige nummer kunt u zien wat daar allemaal aan de orde zal komen.

Projecten in de klas

Bij de veranderingen in het onderwijs en dus ook in het wiskundeonderwijs is er een tendens om meer nadruk te leggen op allerlei vaardigheden. En dan wordt niet direct gedacht aan algebraïsche vaardigheden, maar juist aan probleemoplossen, onderzoeksvaardigheden en dergelijke. Veel docenten zijn daar al op één of andere manier mee bezig: met GWA's en computerpractica in de onderbouw en vbo/mavo. De bovenbouw havo en vwo zal straks in sterke mate geconfronteerd worden met het verschijnsel 'praktische opdrachten'. Euclides wil graag de ervaringen van docenten die hiermee aan het experimenteren zijn over het voetlicht brengen. Doet u met leerlingen onderzoekjes en practica? Laat u leerlingen werkstukken maken en beoordeelt u die? Laat het ons weten. Ik herhaal nog maar eens de oproep uit het vorige nummer:

- U stuurt een *opzet* voor een artikeltje in met onderwerp en voorbeeldmateriaal.
- De redactie stuurt het retour met een voorstel voor omvang, kopjes, opbouw en aandachtspunten.

Ten slotte

Steeds vaker zult u in Euclides actuele informatie aantreffen. In artikelen, maar ook in de kalender achterin. Zou het niet handig zijn als alle sectieleden daarvan steeds op de hoogte zijn? Dat kan eenvoudig. Word lid van de vereniging en u ontvangt Euclides om de vier of zes weken.

Kees Hoogland

Stand van zaken Tweede Fase

Kees Hoogland

Inleiding

In Euclides 72-7 (april 1997) heeft al eens een artikel gestaan met deze titel. Inmiddels zijn een aantal zaken nader duidelijk geworden. De beslissingen welke wiskunde nu precies welke leerlingen moeten krijgen blijkt een complex probleem. Op het moment van schrijven van dit artikel (1 oktober 1997) zijn de beraadslagingen daarover nog niet afgerond. De grote kaders liggen inmiddels wel vast en nog slechts enkele details moeten worden ingevuld.
In dit artikel zal bijeengezet worden wat inmiddels bekend is:
- de studielast
- de (dubbel)keuze A en B
- de examens

De precieze inhoudelijke invulling van met name de vwo-examenprogramma's ligt nog niet definitief vast. De meest waarschijnlijke alternatieven zullen echter aangegeven worden.
Verder is er in dit artikel aandacht voor de roosterproblematiek en worden er enkele woorden gewijd aan het experimentele vwo B-examen.
Ongetwijfeld is bij iedereen inmiddels bekend dat de scholen kunnen kiezen voor invoering in 1998 of 1999. Deze keuze hoeft voor havo en vwo niet dezelfde te zijn. Dat geeft de volgende situatie:

invoering	examen havo	examen vwo
aug. 1998	juni 2000	juni 2001
aug. 1999	juni 2001	juni 2002

De studielast

De studielast is inmiddels als volgt vastgesteld:

havo		
C&M	160 slu	Wiskunde A_1
E&M	280 slu	Wiskunde A_{12}
N&G	320 slu	Wiskunde B_1
N&T	440 slu	Wiskunde B_{12}

vwo		
C&M	360 slu	Wiskunde A_1
E&M	600 slu	Wiskunde A_{12}
N&G	600 slu	Wiskunde B_1
N&T	760 slu	Wiskunde B_{12}

Een paar opmerkingen zijn hierbij van belang:
- Wiskunde is voor zowel havo als vwo uit het gemeenschappelijk deel verdwenen;
- Wiskunde is verplicht voor alle profielen;
- De indices geven aan dat het gaat om deelvakken. Wat nu precies de inhouden zijn van A_1, A_{12}, B_1 en B_{12} wordt verderop toegelicht.

De keuze voor A of B

In het inrichtingsbesluit is vastgelegd dat een leerling in een profiel altijd voor een hogere wiskunde mag kiezen en wel in de volgorde
A_1 - A_{12} - B_1 - B_{12}.
Maakt een leerling een dergelijke keuze dan betekent dat in de meeste gevallen dat zo'n leerling minder slu overhoudt in het vrije deel.

Bijvoorbeeld:
- Een leerling doet vwo C&M, maar kiest in plaats van wiskunde A_1 liever wiskunde A_{12}. Dit kost deze leerling 240 slu extra. Er blijft 240 slu minder over om in het vrije deel te kiezen.
- Een leerling doet havo N&G, maar kiest in plaats van wiskunde B_1 liever wiskunde B_{12}. Dit kost deze leerling 120 slu extra.

De dubbelkeuze A en B

In tegenstelling tot eerdere berichten mag een leerling toch ook een wiskunde A-variant kiezen naast een wiskunde B-variant. Dan vindt voor dat extra vak (in het vrije deel) echter wel een reductie in studielast plaats: voor de havo -160 slu, voor het vwo - 280 uur.
Zo'n leerling moet zo'n vak in het vrije deel dus in minder studielasturen doen dan er regulier voor staat.

Enkele voorbeelden:
- Een leerling doet havo N&G en kiest naast wiskunde B_1 ook wiskunde A_{12} in het vrije deel. Deze leerling moet dit dan wel doen in 280 - 160 = 120 slu.
- Een leerling doet havo C&M en kiest naast wiskunde A_{12} ook wiskunde B_1 in het vrije deel. Deze leerling moet dit dan doen in 320 - 160 = 160 slu.
- Een leerling doet vwo N&T en kiest naast wiskunde B_{12} ook wiskunde A_{12} in het vrije deel. Deze leerling moet dit dan doen in 600 - 280 = 320 slu. Deze leerling doet dan overigens wel 1080 slu wiskunde.

Al met al geeft dat de volgende studielast-varianten voor de leerlingen:

A_1	A_{12}	B_1	B_{12}	havo	vwo
x				160	360
	x			280	600
		x		320	600
			x	440	760
x		x		320	680
x			x	440	840
	x	x		440	920
	x		x	560	1080

Als u daarnaast de studielast legt die een leerling ‘regulier’ in een profiel voor wiskunde zou hebben, dan ziet u voor elke keuze hoeveel extra slu dat zo’n leerling kost.

havo-tabel

Onderdeel	C&M	E&M	N&G	N&T
Tellen en kansen	40	40	40	40
Veranderingen	40[1])	40[1])	40[1])	40[1])
Statistiek	40	40[2])		
Verbanden	40	40		
Toegepaste analyse (A)		80		
Binomiale verdeling		40[2])		
Toegepaste analyse 1 (B)			120	120
Ruimtemeetkunde 1			40	40
Kansberekening en statistiek			80[2])	
Ruimtemeetkunde 2				80
Toegepaste analyse 2 (B)				120
Totaal	160	280	320	440

vwo-tabel

Onderdeel	C&M	E&M	N&G	N&T
Functies en grafieken	100	100	100	100
Discrete analyse	40	40	40	40
Combinatoriek en kansrekening	100	100	100	100
Meetkunde		40[3])	40[3])	40[3])
Differentiaalrekening met toepassingen	(40)[4])	80		
Statistiek en kansrekening	80	80		
Grafen en matrices	(40)[4])	40		
Discrete dynamische modellen		40		
Lineair programmeren		40		
Differentiaal- en integraalrekening			120	120
Goniometrische functies			40	40
Continue dynamische modellen			40	40
Voortgezette kansrekening			40[5])	40[5])
Normale verdeling en toetsen			40[5])	
Voortgezette meetkunde				120
Voortgezette analyse				80
Zebra		40	40	40
Totaal	360	600	600	760

Centrale examens en schoolexamens

Wiskunde vwo C&M, E&M, N&G, N&T wordt afgerond met een schoolexamen en een centraal examen.
Wiskunde havo E&M, N&G, N&T wordt afgerond met een schoolexamen en een centraal examen.
Wiskunde havo C&M wordt alleen afgerond met een schoolexamen, eventueel aan het eind van 4 havo. De door sommigen gestelde vraag of misschien aan het eind van 5 vwo al centraal examen C&M (= wiskunde A_1) gedaan mag worden, moet ontkennend beantwoord worden. Centrale examens worden slechts aan het eind van de rit afgenomen.

De examenprogramma’s

Hiernaast ziet u twee tabellen waarin de wiskunde-domeinen genoemd worden voor havo en vwo.

Er zijn twee bronnen waar u de precieze invulling van deze domeinen kunt vinden.
Het meeste staat al in de paarse SLO-brochure van december 1996, geschreven door Douwe Kok. (SLO-verkoop, 053 4840 305). In die brochure werd nog uitgegaan van gemeenschappelijke delen en een andere studielast voor vwo C&M.
Echter voor de havo-programma’s en voor het vwo-programma A_1 en A_{12} kunt u daarin wel de juiste inhouden vinden.
De examenprogramma’s voor vwo N&G en N&T zijn op basis van het Profi-project nader ingevuld. Het Freudenthal instituut heeft ze onlangs bij het ministerie ingediend. Verderop in dit nummer treft u deze domeinen volledig aan. Om een indruk te krijgen van een meer concrete invulling van dit programma kunt u experimentele leerstofpakketjes bestellen bij het Freudenthal instituut (030-2611611).
In die tabellen voor havo en vwo zijn echter nog wel een aantal voetnoten aangegeven. Sommige zijn nodig om de precieze invulling nader aan te geven, andere betreffen nu juist die zaken die nog niet definitief vaststaan. Hierna volgt de toelichting.

[1]) Het blok *Veranderingen* is bij wiskunde A (C&M, E&M) en bij wiskunde B (N&G, N&T) niet helemaal identiek geformuleerd. Het is wel in één klas uit te voeren.

[2]) De blokken *Statistiek* en *Binomiale verdeling* bij wiskunde A_{12} (E&M) komen vrijwel geheel overeen met het blok *Kansrekening en statistiek* bij wiskunde B_1 (N&G).

[3]) Voor E&M gaat het om de subdomeinen: Ruimtelijke objecten en Lineair programmeren. Voor N&G en N&T gaat het om de subdomeinen: Ruimtelijke objecten en Berekeningen.

[4]) Hierover is nog geen beslissing gevallen. Het wordt óf het subdomein Afgeleide functies óf het domein Grafen en matrices.

[5]) Ook hier worden nog steeds enkele opties overdacht. Er gaan stemmen op om het domein Voortgezette Kansrekening helemaal te schrappen en die 40 slu te gebruiken om mogelijke overladenheid op te vangen. Een andere optie is het domein Voortgezette Kansrekening te schrappen, maar dan wel vwo N&T het domein Normale verdeling en Toetsen te laten doen. Dat betekent namelijk dat op het vwo B_1 tenminste een echte deelverzameling van B_{12} wordt.

In het volgende nummer van Euclides hopen wij u te kunnen berichten wat hierover de definitieve beslissingen zijn.

Roosteren in 4 vwo

Veel scholen zijn op dit moment bezig met vingeroefeningen wat betreft de verdeling van de studielast van de verschillende vakken over de leerjaren.
Hieronder volgen een paar aandachtspunten.
Binnen het vwo moet in ieder geval voor 4 vwo een beslissing genomen worden. Hieronder volgen een paar zeer uiteenlopende opties met voor- en nadelen.

Optie 1:
De profielen hebben 240 slu gemeenschappelijk. Deze kunnen in 4 vwo ingeroosterd worden (circa 5 lesuren).
De voordelen hiervan zijn:
- Alle leerlingen kunnen bij elkaar gezet worden;
- De profielkeuze en de keuze van welke soort wiskunde in dat profiel hoeft pas aan het eind van 4 vwo gemaakt te worden.

De nadelen zijn:
- Leerlingen die C&M gaan doen moeten nog twee jaar worden beziggehouden met 120 slu;
- Leerlingen die N&T gaan doen moeten nog veel doen in 5 en 6 vwo.

Optie 2:
De leerlingen direct aan het begin van 4 vwo opsplitsen in twee stromen: een A- en een B-stroom. De A-stroom doet 180 of 200 slu in 4 vwo, de B-stroom doet 280 of 320 slu in 4 vwo.
De voordelen zijn:
- Homogenere groepen;
- Evenwichtiger verdeling leerstof over de jaren.

De nadelen zijn:
- De profielkeuze en de keuze van welk soort wiskunde in dat profiel moet al in het begin van 4 vwo gemaakt te worden;
- Switchen ‘omhoog’ is al heel snel niet meer mogelijk;
- Lastiger in te passen met andere vakken.

Optie 3:
Er wordt niet meer gewerkt met een jaarrooster maar met bijvoorbeeld semester-roosters: Alle leerlingen krijgen samen in het eerste semester 120 slu wiskunde, daarna een splitsing in een A- en een B-stroom.
De voor- en nadelen liggen in tussen die van optie 1 en optie 2.

Een extra aandachtspunt is de eerdergenoemde mogelijkheid dat leerlingen in een profiel mogelijk een ‘hogere’ wiskunde kiezen of mogelijk in de vrije ruimte een extra wiskundevak doen.

Roosteren in 4 en 5 havo wiskunde B

Bij het inroosteren van wiskunde B in 4 en 5 havo treden twee knelpunten op:
- Wiskunde B_1 is geen deelverzameling van B_{12}.
- De inhoud van wiskunde B_2 leunt heel sterk op wiskunde B_1.

Ook hier zijn verschillende opties mogelijk.

Optie 1:
Eerst de overeenkomstige leerstofdomeinen en daarna de profielspecifieke leerstofdomeinen inroosteren.
Voor havo wiskunde B ziet dat er als volgt uit.

	N&G	N&T
4 havo	240 slu 5 uur per week	
5 havo	80 slu 2 uur per week	200 slu 4 uur per week

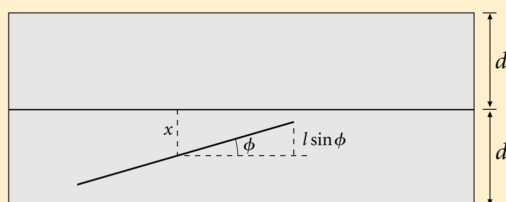
De voordelen zijn:
- B-leerlingen zitten in 4 havo nog bij elkaar.
- Definitieve wiskundekeuze kan laat gemaakt worden.

De nadelen zijn:
- N&G is in 5 havo alleen bezig met die 80 uur Kansrekening en statistiek. Ze moeten echter wel een centraal examen doen over alle stof.

Optie 2:
In een artikel van het PMVO wordt aangeraden om de profiel-specifieke leerstofgedeelten vooral náást de

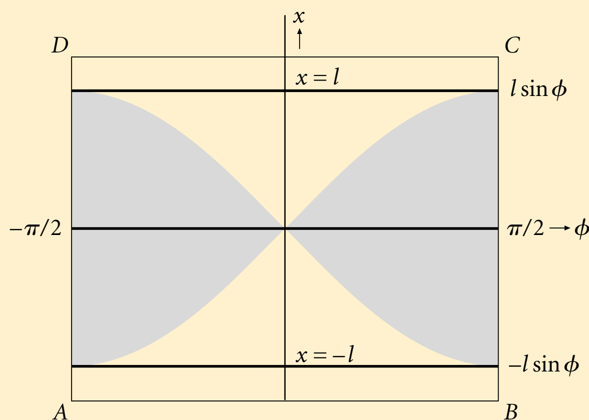
π en de naald van Buffon

George Louis Leclerc, Comte de Buffon (1707-1788) gaf in 1777 een oplossing van het volgende vraagstuk:
Gooi een naald van lengte $2l$ op een planken vloer met planken van breedte $2d$. Wat is de kans dat de naald niet op een naad tussen de planken valt?
We geven hier de oplossing voor het geval dat $l = d$.
De positie van de naald wordt bepaald door de plaats van het midden van de naald en de oriëntatie. We nemen aan dat iedere positie van het midden en iedere oriëntatie even waarschijnlijk zijn, en bovendien dat deze twee variabelen onafhankelijk zijn.
De van teken voorziene afstand tot de dichtstbijzijnde naad geven we aan met x $(-l < x \leq l)$ en de oriëntatie door de hoek ϕ $(-\frac{\pi}{2} < \phi \leq \frac{\pi}{2})$.



Uit de figuur zien we dat de naald een naad snijdt indien $|x| \leq l|\sin\phi|$.

Om de kans op deze gebeurtenis te vinden beschouwen we de rechthoek $ABCD$ uit onderstaande figuur.



Ieder punt in deze rechthoek geeft precies één positie van de naald weer. De punten tussen de grafieken van $x = l\sin\phi$ en $x = -l\sin\phi$ horen bij de gevraagde gebeurtenis.
De totale oppervlakte van de rechthoek is $2l\pi$. De oppervlakte tussen de grafieken is gelijk aan $4l$.
De gevraagde kans is dus

$$\frac{4l}{2l\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Met een naald en parketvloer of een simulatieprogrammaatje op de computer kunnen we dus π bepalen. Waarbij wel opgemerkt moet worden dat er heel wat worpen nodig zijn om een paar decimalen te krijgen.

literatuur

Beckman
A history of π
v.d. Genugten
Inleiding tot de waarschijnlijkheidsrekening en mathematische statistiek deel 1

leerstofgedeelten die overeenkomstig zijn, te roosteren. Voor havo wiskunde B kan dat er als volgt uitzien:

	N&G 80	N&G / N&T 240	N&T 200
4 havo	40 slu 1 lesuur per week	120 2 à 3 lesuren per week	100 2 lesuren per week
5 havo	40 slu 1 lesuur per week	120 2 à 3 lesuren per week	100 2 lesuren per week

Een voordeel is:
- Makkelijker roosterstructuur voor het gehele rooster.

De nadelen zijn:
- De 200 uur N&T bestaat uit 80 uur *Ruimtemeetkunde 2* en 120 uur *Toegepaste analyse 2*. Deze zijn echter niet zomaar tegelijk uit te voeren met *Ruimtemeetkunde 1* en *Toegepaste analyse 1*;
- Leerlingen kiezen heel snel voor definitieve B-richting.

Heeft uw school al (voorlopige) keuzes gemaakt? Meld het aan de redactie.

Experimenteel wiskunde B-examen

Op twee scholen is dit jaar een experimenteel vwo wiskunde B-examen afgenomen. Als werkbladen in dit nummer vindt u een tweetal kenmerkende opgaven uit dat examen.
Voor het volledige examen verwijs ik u naar de Nieuwe Wiskrant van juni 1997. De resultaten voor dat examen waren bij een deelname van 95 leerlingen 6,2 gemiddeld. Om u een idee te geven van hoe de leerlingen scoorden op de opgaven uit de werkbladen de volgende gegevens.

Opgave 4 Een pijlvormig gebied
Vraag 5 werd door vrijwel alle leerlingen foutloos gemaakt.
Vraag 8 echter bleek de moeilijkste van het hele examen:

opg.	max.	p-waarde
5	5	99
6	6	50
7	7	70
8	6	25

Opgave 5 Iteratie
Deze opgave werd als geheel zeer moeilijk gevonden. Het grafisch weergeven van een iteratief proces en het onderzoeken van de convergentie afhankelijk van de gekozen startwaarde bleek veel leerlingen te machtig:

opg.	max.	p-waarde
9	5	58
10	5	36
11	7	27

Ten slotte

In dit artikel zijn een aantal zaken bij elkaar gezet die te maken hebben met wiskunde in de Tweede Fase. Er zijn een aantal aandachtspunten en aantal knelpunten geformuleerd. Oplossingen worden er echter niet gegeven. Die oplossingen zullen vooral op school gezocht dienen te worden. Mogelijke oplossingen hangen sterk samen met de beslissingen die ook voor andere vakken worden genomen. De redactie van Euclides zou het zeer op prijs stellen als mogelijke oplossingen en keuzes worden ingezonden. Collega's kunnen daar dan weer verder mee.
Overigens is in dit artikel nog niet gesproken over de nieuwe inhouden, over de grafische rekenmachine, over praktische opdrachten, noch over zelfstandig leren en studiehuis.
Er is nog veel te doen.

Oproep

Wiskundesecties gezocht die in 1998 met de Tweede Fase starten

De redactie van Euclides wil wiskundesecties van scholen die in 1998 starten met de Tweede Fase in de gelegenheid stellen contact met elkaar te zoeken.
In de komende nummers van Euclides willen we een lijstje publiceren van dergelijke scholen met contactpersonen.
Wij verzoeken de betreffende scholen/docenten hun gegevens aan ons bekend te maken:
- Naam school en plaats
- Start in 1998 met havo en/of vwo
- Contactpersoon wiskundesectie met adres of telefoonnummer
- Indien bekend: welke methode gebruikt zal worden

Op deze wijze hopen we dat wiskundesecties van wederzijdse ervaringen kunnen profiteren.
Inzenden aan de hoofdredacteur. Gegevens: zie colofon.

Ook als u wel start in 1998, maar de gegevens niet gepubliceerd wil zien, verzoeken wij dit te melden in verband met een kwantitatief overzicht.

Concept Wiskunde-programma's vwo N&G en N&T september 1997

Voor de volledige profielwiskunde vwo N&G (600 slu) gelden de volgende domeinen:
- De domeinen A, B, C, D, E, zoals die in het gemeenschappelijk deel vwo in de SLO-brochure staan beschreven (280 slu);
- De domeinen B, C, D, E en F zoals hieronder beschreven (280 slu);
- Een zebra-blok (40 slu).

Voor de volledige profielwiskunde vwo N&T (760 slu) gelden de volgende domeinen:
- De domeinen A, B, C, D, E, zoals die in het gemeenschappelijk deel vwo in de SLO-brochure staan beschreven (280 slu);
- De domeinen B, C, D, E, G en H zoals hieronder beschreven (440 slu);
- Een zebra-blok (40 uur).

Domein B: Differentiaal- en Integraalrekening (120 slu)

Subdomein: afgeleide functie
De kandidaat kan
1 de helling van een grafiek in een punt numeriek-grafisch benaderen als de functie gegeven is door een formule.
2 het differentiaalquotiënt gebruiken als maat voor de locale verandering van een functie en als richtingscoëfficiënt van de raaklijn.
3 het differentiaalquotiënt gebruiken om een functie locaal lineair te benaderen.
4 het verband aangeven tussen de afgeleide van een functie f en van een functie g waarvan de grafiek door verschuiven of rekken uit die van f is ontstaan.
5 de afgeleide functie gebruiken voor het bestuderen van stijging of daling van een functie.
6 de afgeleide gebruiken bij het vinden van extremen van een functie of het verifiëren van langs numeriek-grafische weg gevonden extremen.
7 de tweede afgeleide gebruiken om toe- of afname van stijging of daling te onderscheiden.
8 de tweede afgeleide gebruiken bij het vinden van buigpunten van een grafiek of het verifiëren van langs numeriek-grafische weg gevonden buigpunten.
9 de diverse notaties voor de afgeleide en de tweede afgeleide functie: $f'(x)$, $\frac{d}{du}f(u)$, $\frac{ds}{dt}$, $f''(x)$ herkennen en gebruiken.
10 relaties leggen tussen begrippen in contexten, met name de begrippen snelheid en versnelling, de eerste en/of tweede afgeleide van een functie en de grafieken van de eerste en/of tweede afgeleide.
11 een optimaliseringsprobleem vertalen in een model waarbij een functie van één variabele optreedt en dit probleem vervolgens numeriek-grafisch of met behulp van de afgeleide van deze functie oplossen.
12 het ontstaan van de differentiaalrekening in een historische context plaatsen.

Subdomein: algebraïsche technieken
De kandidaat kan
13 met standaardtechnieken vergelijkingen oplossen en algebraïsche uitdrukkingen omwerken.
14 de afgeleide bepalen van standaardfuncties.
15 bij het bepalen van de afgeleide van exponentiële en logaritmische functies het getal e en de natuurlijke logaritme gebruiken.
16 voor het bepalen van de afgeleide functie de som-, verschil-, product-, quotiënt- en/of kettingregel gebruiken.

Subdomein: integraalrekening
De kandidaat kan
17 bij daarvoor geëigende toepassingen een bepaalde integraal opstellen.
18 met behulp van de grafische rekenmachine of com-

puter een Riemannsom berekenen als benadering van een integraal.

19 de notatie $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ herkennen en gebruiken.

20 een integraal exact berekenen in het geval de integrand
a. de gedaante $f(x) + c, f(x + c), c \cdot f(x)$ of $f(cx)$ heeft, waarbij f een machtsfunctie, een exponentiële functie, de functie sinus of de functie cosinus is.
b. de som van twee of meer functies zoals bedoeld in a. is.

21 een integraal of numerieke benadering ervan gebruiken bij de berekening van lengte, oppervlakte, inhoud, afgelegde weg, zwaartepunt, arbeid, potentiële energie.

22 het ontstaan van de integraalrekening in een historische context plaatsen.

Domein C: Goniometrische Functies (40 slu)

De kandidaat kan
1 de kenmerkende eigenschappen noemen en gebruiken van de grafieken van $y = \sin x$ en $y = \cos x$.
2 graden omrekenen in radialen en omgekeerd.
3 de eenparige cirkelbeweging en de harmonische beweging in verband brengen met de functies sinus en cosinus.
4 gebruik maken van de begrippen amplitude, evenwichtsstand, faseverschil en frequentie bij het tekenen van een sinusoïde of het beschrijven van een periodiek verschijnsel.
5 bij een gegeven sinusoïde een passende formule opstellen.
6 vergelijkingen oplossen van het type $\sin a(x) = \sin b(x)$ en $\cos a(x) = \cos b(x)$ waarbij a en b lineaire functies van x zijn en hierbij de periodiciteit gebruiken voor het vinden van alle oplossingen.
7 de formules waarin $\sin(t + \pi)$, $\cos(t + \pi)$, $\sin(t + \frac{1}{2}\pi)$, $\cos(t + \frac{1}{2}\pi)$, $\sin(-t)$, $\cos(-t)$, $\sin(2t)$ en $\cos(2t)$ worden uitgedrukt in $\sin t$ en/of $\cos t$, gebruiken bij het herleiden van formules en het oplossen van vergelijkingen.
8 de formules $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ en $\dfrac{\sin t}{\cos t} = \tan t$ gebruiken bij het herleiden van formules.
9 de formules voor $\sin(t \pm u)$, $\cos(t \pm u)$, $\sin t \pm \sin u$, $\cos t \pm \cos u$ gebruiken bij het verklaren van samengestelde trillingspatronen en bij het herleiden van formules.
10 de afgeleiden bepalen van de functies sinus, cosinus en tangens.
11 parametervoorstellingen gebruiken bij het bestuderen van figuren van Lissajous en bij het berekenen van de snelheid waarmee zo'n figuur wordt doorlopen.

Domein D: Continue Dynamische Modellen (40 slu)

Subdomein: modelleren
De kandidaat
1 kan onderscheid maken tussen een discreet en een continu model voor een dynamisch proces.
2 bij daarvoor geëigende dynamische processen, met name processen van exponentiële groei en afname, en processen van begrensde groei, een differentiaalvergelijking opstellen van het type
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y)$.
3 door middel van substitutie controleren of een functie y oplossing is van een dergelijke differentiaalvergelijking.
4 eigenschappen van een oplossing y interpreteren in termen van het gemodelleerde proces.

Subdomein: oplossen van differentiaalvergelijkingen
De kandidaat
5 kan een richtingsveld (veld van lijnelementen) gebruiken om een grafisch beeld van het dynamische proces te krijgen, ook met behulp van een geschikt computerprogramma.
6 door middel van een formule de algemene oplossing beschrijven van differentiaalvergelijkingen van de volgende vorm:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y \qquad \text{(met } c \text{ constant)}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot (y - k) \qquad \text{(met } c \text{ en } k \text{ constant)}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = c \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{M}\right) \qquad \text{(met } c \text{ en } M \text{ constant)}$$

7 voor elk van de drie genoemde types differentiaalvergelijkingen een oplossing bepalen als er aan een gegeven randvoorwaarde moet worden voldaan, ook in concrete toepassingen.
8 de methode van Euler gebruiken om met behulp van een grafische rekenmachine of computer een oplossing te benaderen van een differentiaalvergelijking van het in 2. bedoelde type.

Domein E: Voortgezette Kansrekening (40 slu)

Subdomein: discrete oneindige kansverdelingen
De kandidaat kan
1 daarvoor geëigende kansexperimenten vertalen naar het model van de geometrische verdeling of naar het model van de Poissonverdeling.
2 bij een geometrische verdeling en bij een Poisson-verdeling kansen berekenen en de verwachtingswaarde berekenen.
3 de eigenschap gebruiken dat de som van twee onafhankelijke toevalsvariabelen met een Poisson-verdeling zelf ook weer Poisson-verdeeld is.
4 discrete toevalsprocessen simuleren met behulp van een randomgenerator op een computer of grafische rekenmachine.

Subdomein: continue kansverdelingen
De kandidaat kan
5 onderscheid maken tussen een discreet en een continu kansmodel.
6 de begrippen kansdichtheid, verdelingsfunctie en verwachtingswaarde van een continue toevalsvariabele hanteren.
7 daarvoor geëigende kansexperimenten vertalen naar het model van de uniforme verdeling of naar het model van de exponentiële verdeling.
8 bij een uniforme verdeling en een exponentiële verdeling kansen berekenen en de verwachtingswaarde berekenen.
9 het begrip geheugenloosheid als karakteristiek van de exponentiële verdeling beschrijven.
10 continue toevalsprocessen simuleren met behulp van een randomgenerator op een computer of grafische rekenmachine.

Subdomein: wachttijden
De kandidaat kan
11 het Poissonproces gebruiken als model voor het aantal binnenkomende klanten in een wachtrij.
12 het verband leggen tussen de exponentieel verdeelde tussen-aankomsttijd en het Poisson-aankomstproces.
13 de evenwichtsverdeling van een eenvoudig wachtrij-systeem gebruiken, evenals het verwachte aantal klanten in het systeem, de verwachte wachttijd en de verwachte bedieningsduur ($M|M|1$ model).

Alleen voor vwo N&G:

Domein F: Normale Verdeling en Toetsen van Hypothesen (40 slu)

Subdomein: standaardafwijking
De kandidaat kan
1 de begrippen variantie en standaardafwijking gebruiken, in het bijzonder bij de binomiale verdeling.
2 de eigenschap dat de variantie van de som van onafhankelijke toevalsvariabelen gelijk is aan de som van de varianties toepassen in het bijzonder bij de binomiale verdeling.

Subdomein: normale verdeling
De kandidaat kan
3 de normale verdeling gebruiken als model voor de kansverdeling van een continue grootheid.
4 het model van de normale verdeling beschrijven gebruik makend van de formule van de kansdichtheid en de verdelingsfunctie als integraal van de kansdichtheid.
5 de verwachtingswaarde en de standaardafwijking gebruiken als karakteristieken van een normale verdeling, inclusief de twee vuistregels voor het percentage afwijkingen van de verwachtingswaarde in relatie tot de standaardafwijking.
6 kansen berekenen van normaal verdeelde toevalsvariabelen gebruik makend van de tabel van de standaard normale verdelingsfunctie of van een geschikte functie op de grafische rekenmachine.
7 gebruik maken van normaal waarschijnlijkheidspapier of van een overeenkomstige functie op de grafische rekenmachine om na te gaan of een gegeven frequentieverdeling overeenstemt met de normale verdeling en om verwachtingswaarde en standaardafwijking te schatten.
8 de verdeling van de som van een groot aantal onafhankelijke gelijk verdeelde toevalsvariabelen normaal benaderen met behulp van de centrale limietstelling.

Subdomein: toetsen van hypothesen
De kandidaat kan
9 binnen een probleemsituatie de begrippen nulhypothese, alternatieve hypothese, eenzijdig toetsen, tweezijdig toetsen en significantieniveau hanteren.
10 bij een normaal verdeelde toevalsvariabele met gegeven standaardafwijking de hypothese $H_0 : \mu = \mu_0$ tegen $H_1 : \mu < \mu_0$ of $H_1 : \mu > \mu_0$ of $H_1 : \mu \neq \mu_0$ formuleren en toetsen.

Alleen voor vwo N&T:

Domein G: Voortgezette Meetkunde (120 slu)

Subdomein: bewijzen in de vlakke meetkunde

De kandidaat kan

1 het verschil aangeven tussen een definitie en een stelling.
2 het verschil aangeven tussen een vermoeden en een stelling.
3 In relevante gevallen het verschil tussen een stelling en haar omkering herkennen en beoordelen welke van de twee bij een bepaald bewijs een rol kan spelen.
4 de structuur van een gegeven bewijs doorgronden.
5 verschillende technieken hanteren bij het geven van een bewijs of het weerleggen van een vermoeden, zoals:
  - het redeneren vanuit het ongerijmde;
  - het gebruik van meetkundige plaatsen;
  - het geven van een tegenvoorbeeld.
6 meetkundige situaties exploreren, met name aan de hand van constructies met een geschikt computerprogramma, en een vermoeden in de vorm van een (te bewijzen) stelling formuleren.
7 bewijzen geven waarbij gebruik gemaakt wordt van eigenschappen van rechte lijnen, cirkels, driehoeken, vierhoeken en waarbij afstanden, hoeken en onderlinge ligging een rol spelen.
8 binnen een concrete probleemsituatie methoden uit de vlakke meetkunde gebruiken.

Subdomein: afstanden en grenzen

De kandidaat kan

9 aangeven wat de afstand van een punt tot een gebied is en daarbij gebruik maken van cirkels rond het aangegeven punt en/of de begrippen normaal en voetpunt.
10 de driehoeksongelijkheid en de stelling van Pythagoras gebruiken om beweringen over afstanden te bewijzen.
11 een gebiedsindeling bij een gegeven verzameling punten tekenen op grond van het naaste-buurprincipe en zo'n indeling gebruiken in diverse contexten.
12 iso-afstandslijnen op variërende afstanden onderzoeken bij een gegeven gebied waarvan de rand uit lijnstukken en/of cirkelbogen bestaat en daarbij de rol van inhammen en hoekpunten bij variërende afstand beschrijven.

Subdomein: beginselen van de analytische meetkunde

De kandidaat kan

13 de coördinaten van een deelpunt van een lijnstuk berekenen, als de coördinaten van de eindpunten van het lijnstuk en de deelverhouding gegeven zijn.
14 analytische voorstellingen geven van een rechte lijn en van een cirkel met gegeven middelpunt en straal.
15 vaststellen of twee lijnen elkaar loodrecht snijden.
16 een vergelijking opstellen van de loodlijn door een gegeven punt op een gegeven lijn.
17 een vergelijking opstellen van de raaklijn aan een cirkel in een gegeven punt van die cirkel.

Subdomein: meetkundige plaatsen en kegelsneden

De kandidaat kan

18 middelloodlijnen, bissectrices, cirkels, parabolen, ellipsen en hyperbolen als meetkundige plaatsen herkennen en gebruiken.
19 in eenvoudige gevallen de meetkundige plaats van punten vinden die gelijke afstand tot twee gegeven gebieden hebben.
20 in concrete situaties de rol van brandpunten en richtlijn herkennen en gebruiken.
21 in een gegeven punt van een cirkel, parabool, ellips of hyperbool de raaklijn construeren.
22 in concrete situaties de raaklijneigenschap van een parabool, ellips of hyperbool gebruiken, met name in verband met spiegels.
23 in eenvoudige gevallen de verplaatsing van een golffront beschrijven die door een parabolische, elliptische of hyperbolische spiegel gereflecteerd wordt.
24 een geschikt rechthoekig assenstelsel in het vlak kiezen en een vergelijking optellen van een meetkundige plaats die gedefinieerd is via gelijke afstanden tot twee punten, een punt en een lijn, een punt en een cirkel, een cirkel en een lijn respectievelijk twee disjuncte cirkels.
25 een vergelijking van een parabool herkennen en gebruiken, en de coördinaten van top en brandpunt berekenen in het geval de symmetrie-as samenvalt of evenwijdig is met de x-as of de y-as.
26 een vergelijking van een ellips of hyperbool herkennen en gebruiken, in het geval de symmetrie-assen samenvallen of evenwijdig zijn met de x-as en de y-as.

Alleen voor vwo N&T:

Domein H: Voortgezette Analyse (80 slu)

Subdomein: rijen

De kandidaat kan

1 een voorstelling van een rij door een 'directe' formule en door een recurrente betrekking herkennen en gebruiken.
2 bij een rij gedefinieerd door een formule van de vorm $x_{n+1} = f(x_n)$ een grafische voorstelling (web) maken.

3 bij een door een formule gegeven rij een formule voor de rij van differenties opstellen.
4 in geschikte gevallen de partiële sommen van een rij uitdrukken in n.
5 bij een rij de begrippen monotoon stijgend, monotoon dalend, alternerend en begrensd gebruiken.
6 enkele (historisch) belangrijke rijen herkennen zoals de rij van Fibonacci, de harmonische rij en de rekenmeetkundige rij.

Subdomein: convergentie van rijen

De kandidaat kan

7 het begrip convergentie van een rij hanteren en de notatie $\lim_{n \to \infty} u_n = c$ herkennen en gebruiken.
8 de implicatie ‘als $\lim_{n \to \infty} |u_n| = \infty$, dan $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{u_n} = 0$’ gebruiken.
9 enkele standaardlimieten, zoals $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 0)$,

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \text{ en } \lim_{n \to \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \ (a > 1)$$

herkennen en gebruiken.
10 limieten van rijen berekenen met behulp van som-, verschil-, product- en quotiëntregel.
11 de implicatie ‘als f continu in a is en $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, dan $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a)$’, gebruiken bij het berekenen van limieten in het geval dat f samengesteld is uit standaardfuncties.
12 de insluitstelling gebruiken bij het berekenen van limieten.
13 het verband leggen tussen de limiet van een rij gegeven door een formule van de vorm $x_{n+1} = f(x_n)$ en een oplossing van de vergelijking $x = f(x)$.

Subdomein: sommeerbare rijen

De kandidaat kan

14 het begrip sommeerbaarheid van een rij hanteren en de notatie $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ herkennen en gebruiken.
15 bepalen of een meetkundige rij sommeerbaar is of niet en bij een sommeerbare meetkundige rij de limietsom berekenen.
16 het verband leggen tussen de sommeerbaarheid van een rij en het bestaan van een oneigenlijke integraal.

Subdomein: irrationale getallen

De kandidaat kan

17 de irrationaliteit van een getal als $\sqrt{2}$ bewijzen.
18 aan de hand van een algoritme een getal als $\sqrt{2}$ benaderen met rationale getallen.
19 onderscheid maken tussen rationale en irrationale getallen en het verband leggen tussen deze getallen en oneindige repeterende en niet-repeterende decimale breuken.

Subdomein: limieten en functies

De kandidaat kan

20 het begrip differentieerbaarheid in verband brengen met een limietproces.
21 enkele standaardlimieten, zoals $\lim_{r \to 1} \frac{r^p - 1}{r - 1} = p$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

herkennen en gebruiken.
22 horizontale of verticale asymptoten van de grafiek van een functie in verband brengen met limieten.

Analyse zonder afgeleide

Bram van Asch

Inleiding

Als onderdeel van een groter probleem speelde de extreme waarde van $f(y) = y^2 + 2$ een rol; een triviaal probleem dus.
Een student loste dit op, op de hem aangeleerde manier, dus via differentiëren, tekenoverzicht van de afgeleide, etcetera. Hij maakte echter een foutje bij het differentiëren, en schreef op: $f'(y) = 2y + 2$. Uit het tekenoverzicht hiervan volgt dan keurig dat de functie een minimale waarde heeft voor $y = -1$, en dat dit minimum dus gelijk is aan 3. Geconfronteerd met dit toch wel erg foute antwoord, doet de student dit af met 'rekenfoutje bij het differentiëren, maar verder is het toch wel goed?'
Dit geeft mijns inziens goed aan tot welk een automatisme het differentiëren voor veel studenten verworden is; hoe weinig begrip er is, en hoe weinig verband met de oorspronkelijke functie er gelegd wordt. In dit artikel wordt een poging ondernomen een stukje analyse, met betrekking tot extreem-bepalingen op te zetten zonder dat daarbij het begrip afgeleide gebruikt wordt. Een en ander is geïnspireerd door het boekje 'Maxima and minima without calculus' [1].

De techniek die gebruikt wordt om uitspraken over maxima en minima te doen is gebaseerd op een relatie tussen het meetkundige gemiddelde en het rekenkundige gemiddelde van een stel positieve getallen. In het genoemde boek worden enkele bewijzen van deze relatie gegeven, waaronder één met volledige inductie. In [2] wordt ook een aantal bewijzen gegeven; enkele daarvan zullen min of meer gereproduceerd worden.

De inhoud van dit artikel is als volgt. Eerst worden de begrippen meetkundig gemiddelde en rekenkundig gemiddelde geïntroduceerd. Veel aandacht wordt geschonken aan een fundamentele relatie tussen deze beide. Een gevolg hiervan zal een stelling zijn die in sommige situaties de mogelijkheid biedt uitspraken over maxima of minima te doen. Daarna wordt een aantal voorbeelden gegeven. De besproken techniek is uiteraard zeker niet in alle situaties bruikbaar, maar dat is differentiëren ook niet. In veel gevallen is het bepalen van nulpunten van de afgeleide ook een onmogelijke zaak.

Meetkundig en rekenkundig gemiddelde

Laat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ een rijtje niet-negatieve getallen zijn. Het meetkundig gemiddelde $M(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en het rekenkundig gemiddelde $R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ worden gedefinieerd als

$$M(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

$$R(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Voor twee getallen a_1, a_2 staat er dus

$$M(a_1, a_2) = \sqrt{a_1 a_2}, \quad R(a_1, a_2) = \frac{a_1 + a_2}{2},$$

en uit

$$a_1 a_2 = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \quad (1)$$

volgt

$$\begin{cases} M(a_1, a_2) \leq R(a_1, a_2), \text{ en} \\ M(a_1, a_2) = R(a_1, a_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2. \end{cases}$$

Voor $n > 2$ geldt een analoog resultaat, geformuleerd in de volgende stelling.

Stelling 1
Er geldt $M(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq R(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ en het gelijkteken geldt dan en slechts dan als $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Voor deze stelling over het meetkundig en rekenkundig gemiddelde zijn tal van bewijzen bekend. Eén bewijs zou uiteraard voldoende zijn. We geven er toch meer dan één, omdat het aardig is enkele (elementaire) bewijzen te presenteren die vanuit totaal verschillend standpunt

gegeven kunnen worden. Voor de strekking van het verhaal ('analyse zonder afgeleide') is dat overigens niet van belang. De eerste twee zijn ontleend aan [2]. Ter afkorting schrijven we $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

Bewijs 1
Uit (1) volgt voor vier getallen

$$a_1\ a_2\, a_3\, a_4 \le \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \left(\frac{a_3 + a_4}{2}\right)^2 \le$$

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}\right)^4$$

dus $M(a_1, a_2, a_3, a_4) \le R(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Bovendien geldt het gelijkteken dan en slechts dan als in bovenstaande ongelijkheden op beide plaatsen het gelijkteken geldt; daaruit volgt dat dan geldt $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.
Herhaald toepassen van dit argument (desgewenst met volledige inductie) levert de juistheid van de stelling in het geval n een macht van 2 is. Als n geen macht van 2 is, is er een getal m met $2^{m-1} < n < 2^m$. Maak dan met behulp van $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ een rijtje $\underline{b}$ met lengte 2^m als volgt:

$$b_1 = a_1,\ \ b_1 = a_2, \dots,\ b_n = a_n,$$

$$b_{n+1} = \dots = b_{2m} = R(\underline{a}).$$

Er geldt dan in elk geval

$$b_1 b_2 \dots b_{2m} \le (R(\underline{b}))^{2^m},$$

en

$$R(\underline{b}) = R(\underline{a}),$$

dus

$$a_1\, a_2 \dots a_n (R(\underline{a}))^{2^m - n} \le R(\underline{a}))^{2^m}$$

ofwel

$$a_1\, a_2 \dots a_n \le R(\underline{a})^n$$

De conclusie met betrekking tot het gelijkteken valt nu ook te trekken.

Bij het tweede bewijs wordt een beroep gedaan op een stelling van Weierstrass:
een continue functie neemt op een begrensd en gesloten gebied een maximale (en een minimale) waarde aan.

Bewijs 2
Laat $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ gegeven zijn.
Als eerste merken we op dat als niet alle getallen uit $\underline{a}$ aan elkaar gelijk zijn, er een a' is met $R(\underline{a}') = R(\underline{a})$ en $M(\underline{a}') > M(\underline{a})$. Stel namelijk dat a_i, respectievelijk a_j het kleinste, respectievelijk het grootste getal uit $\underline{a}$ zijn. Dan geldt in elk geval $a_i < a_j$. Noem $\underline{a}'$ het rijtje getallen dat je krijgt door in $\underline{a}$ zowel a_i als a_j te vervangen door

$\dfrac{a_i + a_j}{2}$. Duidelijk is dat dan in elk geval geldt

$$R(\underline{a}') = R(\underline{a}).$$

Bovendien

$$M(\underline{a})^n = a_1\, a_2 \dots a_n < \left(\frac{a_i + a_j}{2}\right)^2 \prod_{k \ne i, j} a_k = M(\underline{a}')^n,$$

dus

$$M(\underline{a}) < M(\underline{a}')$$

De tweede opmerking is dat voor elke positieve constante C de functie

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = x_1 \dots x_{n-1}(nC - x_1 - \dots - x_{n-1})$$

een maximum aanneemt op het gebied

$$x_i \ge 0,\ i = 1, \dots, n-1,\ \ x_1 + \dots + x_{n-1} \le nC.$$

Dit is immers een continue functie op een begrensd en gesloten gebied.

Neem nu in het bijzonder $C = R(\underline{a})$, en bekijk alle $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots x_n)$ met $x_i \ge 0$ en $R(\underline{x}) = R(\underline{a})$. Dan is dus $x_n = n\,R(\underline{a}) - x_1 - \dots - x_{n-1}$.
Er is dan een $\underline{a}^* = (a^*_1, a^*_2, \dots a^*_n)$ zó dat $a^*_n = n\,R(\underline{a}) - a^*_1 - \dots - a^*_{n-1}$,

en $M(\underline{a}^*)^n = a^*_1\, a^*_2 \dots a^*_n$ maximaal is.
Volgens de eerste opmerking die we maakten moet dan $a^*_1 = a^*_2 = \dots = a^*_n$.
Dan geldt dus in het bijzonder
$M(\underline{a}^*) = a^*_1 = R(\underline{a}^*) = R(\underline{a})$ en omdat $M(\underline{a}^*)$ maximaal is, geldt

$$M(\underline{a}) \le R(\underline{a}).$$

Uit bovenstaande redenering volgt ook dat het gelijkteken geldt dan en slechts dan als $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Het laatste bewijs dat we presenteren is erg kort, maar doet een beroep op een eigenschap van de functie $x \to e^x$:

$$(2)\quad \begin{cases} \text{voor alle } x \in \mathbb{R} \text{ geldt } e^x \ge ex; \\ \text{het gelijk-teken geldt alleen voor } x = 1. \end{cases}$$

De meest gebruikelijke manier om deze eigenschap van de exponentiële functie aan te tonen is door gebruik te maken van de afgeleide van deze functie. Dat past echter niet in het uitgangspunt voor dit artikel, waarin we analyse zonder afgeleiden willen bedrijven. Eigenschap (2) kan ook bewezen worden zonder te differentiëren, maar dat kost nogal wat moeite. Met (2) als gegeven wordt bewijs 3 erg eenvoudig.

Bewijs 3

$$e^{a_i/R(\underline{a})} \geq e \frac{a_i}{R(\underline{a})} \quad \text{voor } i = 1, \ldots, n$$

dus

$$\prod_{i=1}^{n} e^{a_i/R(\underline{a})} \geq \prod_{i=1}^{n} e \frac{a_i}{R(\underline{a})}$$

De producten links en rechts leveren eenvoudige uitkomsten:

$$e^n \geq e^n \frac{M(\underline{a})^n}{R(\underline{a})^n} \text{, dus}$$

$$M(\underline{a}) \leq R(\underline{a}).$$

En uit (2) volgt ook dat het gelijkteken geldt dan en slechts dan als $\frac{a_i}{R(\underline{a})} = 1$, $i = 1, \ldots, n$, dus als

$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Gevolg
Tot zover de beschouwingen over de relatie tussen het meetkundig en rekenkundig gemiddelde van een rijtje getallen. We maken hiervan gebruik in de volgende situatie. Stel dat $f_1(x_1, \ldots, x_k), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_k)$ functies zijn in k variabelen, en veronderstel verder dat deze functies positieve waarden aannemen op het gebied waarop we ze beschouwen.

Stelling 2

(i) Als $\prod_{i=1}^{n} f_i(\underline{x})$ constant is, en er is een $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ met $f_1(\underline{a}) = \ldots = f_n(\underline{a})$, dan is $\sum_{i=1}^{n} f_i(\underline{x})$ minimaal voor $\underline{x} = \underline{a}$.

(ii) Als $\sum_{i=1}^{n} f_1(\underline{x})$ constant is, en er is een $\underline{a} \in \mathbb{R}^k$ met $f_i(\underline{a}) = \ldots = f_n(\underline{a})$, dan is $\prod_{i=1}^{n} f_i(\underline{x})$ maximaal voor $\underline{x} = \underline{a}$.

Bewijs
(i) Dit volgt vrijwel rechtstreeks uit Stelling 1. Als nl.

$\prod_{i=1}^{n} f_i(\underline{x}) = c$, dan geldt voor alle $\underline{x}$ dat

$\sum_{i=1}^{n} f_i(\underline{x}) \geq n\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(\underline{x})\right)^{\frac{1}{n}} = n\, c^{\frac{1}{n}}$. En als

$f_1(\underline{a}) = \ldots = f_n(\underline{a})$ dan wordt dit minimum $n\, c^{\frac{1}{n}}$ ook voor $\underline{x} = \underline{a}$ aangenomen.

De redenering voor onderdeel (ii) is analoog.

Voorbeelden
1 *Bepaal de extreme waarde van* $f(x) = 2x + \frac{1}{3x}$ *voor* $x > 0$.

Oplossing: Voor de functies $f_1(x) = 2x$ en $f_2(x) = \frac{1}{3x}$ geldt $f_1(x)\, f_2(x) = \frac{2}{3}$. Oplossen van $f_1(x) = f_2(x)$ levert als positieve oplossing $x = \frac{1}{6}\sqrt{6}$. Dit betekent dus dat $f(x)$ minimaal is voor $x = \frac{1}{6}\sqrt{6}$.

2 *Bepaal het minimum van* $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{5}{y} + 25xy$ *voor positieve x en y.*

Oplossing: Voor de functies $f_1(x, y) = \frac{8}{x}$, $f_2(x, y) = \frac{5}{y}$, $f_3(x, y) = 25xy$ geldt nu $f_1(x, y)\, f_2(x, y)\, f_3(x, y) = 1000$. Oplossen van $f_1(x, y) = f_2(x, y) = f_3(x, y)$ levert $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{1}{2}$. De functie $f(x, y)$ is dus minimaal voor $(x, y) = (\frac{4}{5}, \frac{1}{2})$

3 *Bepaal het minimum van* $f(x, y) = x^2 + y$ *op het deel van de hyperbool* $xy = 1$ *dat in het eerste kwadrant ligt.*

Oplossing: Het product x^2y is nu niet constant. Als we echter schrijven $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y$, dan geldt voor $f_1(x, y) = x^2$, $f_2(x, y) = f_3(x, y) = \frac{1}{2}y$ dat $f_1(x, y)\, f_2(x, y)\, f_3(x, y) = \frac{1}{4}x^2y^2 = \frac{1}{4}$.
Oplossen van $f_1(x, y) = f_2(x, y)$ (en $xy = 1$) levert $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$, $y = \sqrt[3]{2}$. De functie is dus minimaal in $(x, y) = (\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

4 De methode gaat mis in het volgende geval:

$f(x) = x^2 + 2x + \frac{11}{x^3}, \quad x > 0.$

Nu geldt wel dat $x^2 \cdot 2x \cdot \frac{11}{x^3} = 22$ constant is maar er is geen oplossing voor de vergelijkingen

$x^2 = 2x$ en $2x = \frac{11}{x^3}$.

5 Een bekend meetkundig probleem: *welke driehoek met gegeven omtrek heeft de grootste oppervlakte?*

Oplossing: Noem de zijden x, y en z, en $x + y + z = c$. We gebruiken de volgende uitdrukking voor de oppervlakte:

$$\sqrt{s(s-x)s-y)(s-z)},$$

waarbij

$$s = \tfrac{1}{2}(x + y + z) = \tfrac{1}{2}c.$$

De oppervlakte is dus maximaal als

$$(s-x)(s-y)(s-z)$$

maximaal is.
De som van deze drie factoren is constant, en dus is het product maximaal als

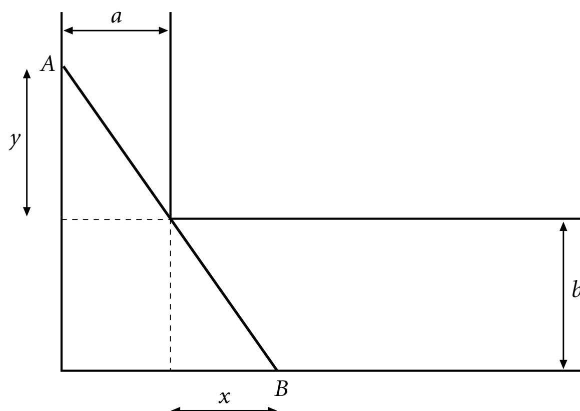
$$s - x = s - y = s - z,$$

met andere woorden als $x = y = z$, dus als de driehoek gelijkzijdig is.

6 Op dezelfde manier kan een soortgelijke vraag voor een koordenvierhoek aangepast worden. De oppervlakte van een koordenvierhoek wordt immers gegeven door

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\,.$$

7 *Twee gangen, met breedtes respectievelijk a en b, staan loodrecht op elkaar (zie figuur). Bepaal de lengte van de langste ladder die deze rechte hoek kan passeren. Dit komt dus in de volgende situatie neer op het bepalen van de minimale afstand AB .*



Oplossing: Nu geldt $y = \dfrac{ab}{x}$.

$$AB = \sqrt{b^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + y^2} = \sqrt{b^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2b^2}{x^2}} = \sqrt{b^2 + x^2}\left(1 + \frac{a}{x}\right).$$

We proberen nu het kwadraat van deze functie te minimaliseren, dus

$$(b^2 + x^2)\left(1 + \frac{2a}{x} + \frac{a^2}{x^2}\right) =$$

$$= a^2 + b^2 + \left(x^2 + \frac{2ab^2}{x}\right) + \left(2ax + \frac{a^2b^2}{x^2}\right) =$$

$$= a^2 + b^2 + \left(x^2 + \frac{ab^2}{x} + \frac{ab^2}{x}\right) + \left(ax + ax + \frac{a^2b^2}{x^2}\right).$$

Met behulp van Stelling 2 is nu gemakkelijk in te zien dat

$x^2 + \dfrac{ab^2}{x} + \dfrac{ab^2}{x}$ minimaal is voor $x = \sqrt[3]{ab^2}$, en

$ax + ax + \dfrac{a^2b^2}{x^2}$ minimaal is voor $x = \sqrt[3]{ab^2}$,

dus beide zijn minimaal voor dezelfde x-waarde.
Maar dat betekent dat AB minimaal is voor $x = \sqrt[3]{ab^2}$ en $y = \sqrt[3]{a^2b}$. De lengte van de langste ladder is dan

$$\sqrt{b^2 + x^2} + \sqrt{a^2 + y^2} = \sqrt{b^2 + b\sqrt[3]{a^2b}} + \sqrt{a^2 + a\sqrt[3]{ab^2}} = = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}.$$

Literatuur

1 *I. Niven*
Maxima and minima without calculus
MAA (1981)

2 *G.H. Hardy & J.E. Littlewood & G. Polya*
Inequalities
Cambridge University Press (1952)

EUCLIDES

Inhoud van de 72e jaargang 1996/1997

Bijdragen

Van de bestuurstafel

Even bijpraten
Het is bijna een jaar geleden dat ik u in deze rubriek voor het laatst informeerde over wat er zoal door het bestuur bedacht, besproken, besloten, geschreven en geregeld was. Dat was niet omdat er het afgelopen jaar niets bedacht, besproken enzo werd, integendeel, het was drukker dan ooit. U hebt onze officiële brieven over kerndoelen basisvorming, het examenprogramma vbo/mavo en tweede fase kunnen lezen. Het opstellen van zulke reacties kost veel tijd, en daardoor is de verslaglegging naar u over andere zaken er een beetje bij in geschoten.
Daarnaast was er mijn persoonlijke praktijkschok. Een aantal jaren was ik als kaderdocent een dag in de week uitgeroosterd vanwege mijn betrokkenheid bij nascholing. Het afgelopen cursusjaar ben ik weer vol in de school en in de lessen gestapt. Dat heb ik geweten.
Inmiddels was de school gefuseerd, waardoor een dure, extra bestuurslaag werd gecreëerd en had de lumpsum toegeslagen, waarbij onze altijd zo zuinige school niet zo best wegkwam. En ik wilde weleens zien hoe het met de basisvorming was gegaan.... Zo vond ik mijzelf terug op achtste uren met 32 leerlingen 4 havo-wiskunde A of 31 leerlingen 4 havo-wiskunde B. In een lokaal dat ooit bedoeld was voor 24, zodat de leerlingen bijkans achter het bord zaten. (Hoezo kijklijnen?)
Dat is geen hobby meer, dat is werk. We hebben het overleefd, maar ik heb me weleens enigszins vertwijfeld afgevraagd of dit mijn doel was in het leven, of ik hier nu voor had doorgeleerd, en vooral hoe het kan dat een land waarmee het economisch zo goed gaat, zo bedroevend weinig over heeft voor de kwaliteit van het voortgezet onderwijs. Zat ik niet met een nobel doel temidden van de bloem der natie? Het komend jaar geef ik minder lessen, dat scheelt inkomsten en pensioen, maar vergroot de kans op een aangenamer leven en het bereiken van dat pensioen. Het geeft me ook meer tijd om me in te zetten voor de vereniging en als uitvloeisel daarvan in het bestuur van het platform van vakinhoudelijke verenigingen (VVVO). In het laatstgenoemde bestuur is een van de actiepunten het verkrijgen van externe faciliteiten voor bestuursleden. U begrijpt dat mijn motivatie hiervoor hoog is. Als dat niet mocht lukken, dan zullen we toch naar andere wegen moeten zoeken. De taken van het bestuur zijn inmiddels te omvangrijk geworden om in de eigen vrije tijd naast een volle baan te kunnen doen.
Maar genoeg geklaagd.

Hoort u wel genoeg van ons?
Het afgelopen jaar hebben studenten van de HES in Rotterdam op ons verzoek een onderzoek uitgevoerd naar de mogelijkheden om het aantal leden uit te breiden. Er zijn zo'n 10.000 wiskundedocenten in Nederland, waarvan er 3500 lid zijn van de NVvW. Het merendeel daarvan geeft les aan havo/vwoscholen. Menige beroepsvereniging zou zeer tevreden zijn met een dergelijk aantal, en wij zijn dat natuurlijk ook wel, maar een verdubbeling zou welkom zijn. Zelfs zonder rekenmachine kom je dan al snel op een verdubbeling van de inkomsten en daarmee vergroot je je mogelijkheden enorm. Verder geldt ook de macht van het getal: als grote vereniging, die echt representatief is, heb je meer invloed dan als kleine. En in een tijd waarin zoveel en zulke ingrijpende veranderingen plaatsvinden in het (wiskunde) onderwijs als nu, is het van belang dat de invloed van de docenten zo groot mogelijk is. Daarnaast hebben we gevraagd te onderzoeken of de leden tevreden waren over de activiteiten van de vereniging. Later komen we nog uitvoerig terug op dit onderzoek en de inzichten die het heeft opgeleverd, maar twee voor het bestuur pikante dingen wil ik u niet onthouden: over het algemeen waren de geënquêteerde leden tevreden over de activiteiten van de vereniging, maar bleken ze niet echt op de hoogte van wat die activiteiten nu precies waren. In het jargon heet dat dat we onze communicatiefunctie niet goed vervullen. Dat trekken we ons aan, we willen u in het vervolg beter informeren over de activiteiten van bestuur en vereniging. Een eerste uitvloeisel is het uitgebreide verslag van de Raad der Wijzen. In een volgend nummer komen onder meer aan bod onze activiteiten rond de wiskunde in de tweede fase en met name de praktische opdrachten, de uitkomsten van het eerdergenoemde onderzoek en onze plannen voor een structuur van de vereniging waarbij niet - bijna - al het werk op het bestuur neerkomt, maar we meer gebruik kunnen maken van de kennis en inzet van de leden.
U hoort nog van ons!!
(En hopelijk wij ook van u.)

Marian Kollenveld

De Raad der Wijzen

Inleiding
In het vorige nummer van Euclides heeft u kennis kunnen nemen van de discussie die tijdens een rondetafelgesprek met deskundigen (de zogenaamde Raad der Wijzen, bijeengeroepen door het bestuur) gevoerd is over computeralgebra en de symbolische rekenmachine. Het tweede onderwerp waarover gediscussieerd werd, was: '*Op hbo-scholen is er een sfeer ontstaan waarbij 'gewone' wiskundedocenten niet meer nodig zijn. Vakdocenten doen de noodzakelijke wiskunde er wel even bij en zullen met behulp van computeralgebra veel vaardigheden door de apparatuur laten verrichten.*'

Aansluiting hbo
Tijdens een bijeenkomst in het najaar van 1996, georganiseerd door uitgeverijen en in samenwerking met de NVvW, is onder andere gesproken over de aansluitingsproblemen van havoleerlingen die naar het hbo gaan. Tijdens de discussie kwam heel duidelijk aan het licht dat de wiskundedocenten, die de theoretische wiskunde aan de studenten moeten uitleggen, terrein aan het verliezen zijn. Men was van mening dat de 'vakdocenten' op het hbo met behulp van computerprogramma's in de toekomst voldoende in staat zouden zijn de noodzakelijke wiskundige vaardigheden aan te brengen.

Vraag: '*Wat zijn de gevolgen voor de werkgelegenheid van de wiskundigen, voor de kennis en vaardigheden van de straks van het hbo afkomende studenten en voor de bedrijven waar deze mensen te werk gesteld zullen worden?*'

De discussie
Roel van Asselt (Hogeschool van Enschede): Los van de werkgelegenheid is het inhoudelijke aspect interessant genoeg, het gaat over de positie van wiskundedocenten in het algemeen. Hoe is de wiskundedocent in het hbo terecht gekomen? Twintig tot vijfentwintig jaar geleden was dat onderwijs heel rigide. Met de komst van andere inhouden, zoals matrixrekening, numerieke wiskunde, statistiek, discrete wiskunde, schoot de expertise van de zittende docenten te kort. (Van numerieke wiskunde is trouwens niets meer over, dat vak is totaal verdwenen.) De wiskundedocenten staan nu in toenemende mate voor decepties, waar het de leerresultaten van hun studenten betreft. Enige abstractie is niet meer mogelijk, leerlingen struikelen ook halverwege over het rekenwerk. Abstracte wiskunde, zoals een bewijs of een model, komt niet meer aan de orde, men komt niet verder dan wat gecompliceerd rekenen.
De havo-examens vinden we prachtig, maar we krijgen de studenten niet op datzelfde niveau aan het werk in het hbo. Daarom grijpt men naar de computer. Het gevolg is: veel computeralgebra in de lagere jaren en problemen bij de toepassingen in de technische vakken in de hogere jaren. Dit is een groot dilemma, ook qua inhoud. De positie van het vak wordt ondergraven. Op de heao wordt vrijwel niets meer aan wiskunde gedaan, daar is het vak verdwenen.
Jan van de Craats (voorzitter CEVO): Ik wil hier graag meer van weten. Hoe kunnen ze wel de toepassingen doen, als er zoveel problemen zijn?
De remedie lijkt voor de hand te liggen: zoek contact met die toepassingen in hogere jaren en stel je wiskunde in de lagere jaren daarop af.
Roel van Asselt: De studenten komen niet over een drempel heen, er is tijd te kort om de vaardigheden voldoende in te oefenen. De vakdocent gaat het dan van de wiskundedocent overnemen om dat gat alsnog te overbruggen ('We leren ze het trucje wel even').
Computeralgebra wordt door vakdocenten slechts mondjesmaat toegepast, het blijft beperkt tot de wiskundigen. Er is onderzoek naar gedaan: ook bedrijven (NS, Shell, en dergelijke) gebruiken het mondjesmaat. Daarmee lijkt computeralgebra een dood spoor.
Jan van de Craats: Dat kun je toch aandragen, die computeralgebra is er nog niet zo lang. Die mensen gebruiken ook hun traditionele middelen. Als wiskundige kun je de rol van computeralgebra toch zichtbaar maken, dat werkt ook legitimerend naar de wiskunde toe.
Wim Kleijne (Inspectie): Er zijn ook problemen die de wiskundedocenten niet kunnen oplossen. Sommige zaken zijn een management- of politiek probleem, zoals de nieuwe financieringssystematiek en het loslaten van de bevoegdheidseisen. Dat speelt ook voor het mbo. Daarom houden wij vast aan de bevoegdheidseisen in het voortgezet onderwijs, anders gebeurt daar hetzelfde.
Anne van Streun (Universiteit Groningen): Hetzelfde is gebeurd met statistiek aan de universiteiten. Het duurde tien jaar voor men zich ging bekommeren om de wiskundige achtergronden van het statistisch model. Wiskundigen moeten praktijkmensen helpen bij het modelleren, anders prijzen we onszelf uit de markt. Je moet waarmaken dat datgene wat je te bieden hebt in het wiskundeonderwijs een transfer heeft naar de vakgebieden.
We moeten daar zelf initiatieven in nemen. Het modelleren is het belangrijkste, Polya zei het al.
Marja Meeder (APS): Er is een link tussen het eerste [computeralgebra en symbolische rekenmachine, red.] en het tweede onderwerp. Wat moet wiskunde nog zijn? Die vragen spelen zowel voor het ho als voor het vo.
Hans van Lint (Voorzitter NVvW): Het blijkt dat het leraren in het ho niet lukt om abstracties bij te brengen en daardoor grijpen ze naar de machines. Dat willen we toch niet in het vo?
Roel van Asselt: Modelleren is het

moeilijkste wat er is voor studenten, het vak wordt er dus veel lastiger van. Goede voorbeelden om de computer in te zetten bij de didactisering van de wiskunde hebben we nog niet gezien. Omdat het getalsmatige verdwenen is, door de computer gedaan wordt, blijft het abstracte begrip over. Het makkelijk toetsbare is daarmee verdwenen. Ik denk ook dat de fase waarin we de computer inzetten, vaak te vroeg is. Wij staan er boven, hebben het overzicht en begrijpen de samenhang, maar de leerlingen en docenten worstelen nog met de basisbegrippen.
Rob Tijdeman: Maar je kunt de student er wel mee motiveren, pak het krijtje als je vastloopt met de computer.
Peter Kop (bestuurslid NVvW): Welke initiatieven zou de vereniging kunnen nemen?
Roel van Asselt: Blijf dicht bij zinvolle toepassingen. Een kanttekening is wel dat het moeilijk is, bijvoorbeeld om een belaste balk, of een reactor, door te rekenen. Eenvoudige toepassingen bestaan niet.
Jan van de Craats: De hbo-docenten moeten het zelf doen, zich verdiepen in de toepassingen en contact opnemen met de afnemers van hun wiskunde. Daar ligt de oplossing.
Hans van Lint: De universitaire wereld zal hier zelf het initiatief moeten nemen, ik zie geen mogelijkheden voor de NVvW.
Rob Tijdeman: Misschien kan het een gemeenschappelijke actie van de NOCW en van de Vereniging zijn. Bij universiteiten is toenemende belangstelling voor het vo. De Vereniging moet hierin dan een gelijkwaardige partner zijn.
Jan van de Craats: Terug naar het vo. In de nieuwe profielen is er sprake van integratie van vakken bij het profielwerkstuk. Hier moet meer dan lippendienst bewezen worden. We zouden contacten moeten zoeken met andere vakken om tot verdere integratie te komen, met name met natuurkunde/scheikunde en economie. De profielen geven hier kansen voor, we moeten zelf initiatieven nemen.
Natuurlijk, iedereen heeft het druk, maar dat geldt voor alle werknemers in Nederland. Als je niet zelf actief met je vak bezig bent, dan ga je ten onder.
Roel van Asselt: Een goed, prikkelend artikel hierover kan helpen om de discussie op de scholen te stimuleren. Maar misschien is de profetie van Freudenthal in het hbo (ook) wel onontkoombaar.
Swier Garst (wiskundedocent en bestuurslid NVvW): Bij natuur- en scheikunde heeft de integratie in met name de onderbouw (basisvorming) juist tot een enorme daling van het niveau geleid.

Met deze waarschuwing uit de praktijk wordt de discussie over het hbo afgesloten en de aandacht verlegd naar het volgende onderwerp, de gevolgen van het 'studiehuis':

Het studiehuis

'*Door de invoering van het studiehuis zal er een grote daling komen van het aantal contacturen van leerlingen en wiskundedocenten. De ervaring van vele jaren heeft op de meeste scholen geleerd dat juist bij wiskunde de klassikale lessen hard nodig zijn. De leerstof wordt niet eenvoudiger, nauwelijks of niet minder uitgebreid en de leerlingen komen niet met meer bagage in de bovenbouw.*'

Toelichting:
De gedachten achter de invoering van het studiehuis zijn onder andere een vergroting van de verantwoordelijkheid van de leerlingen voor hun eigen werk. Dit is op zich een goede zaak. Zolang dit betekent dat het aantal klassikaal te geven lessen vermindert en de scholen naar andere vormen van begeleiding van leerlingen gaan zoeken is er niet zoveel aan de hand. De mogelijkheid is echter niet denkbeeldig dat scholen het aantal uren van contact tussen de docenten en de leerlingen gaan verminderen.

Vraag: '*Wat zijn de gevolgen voor het aantal uren dat aan wiskundedocenten zal worden toebedeeld, voor de arbeidsdruk tijdens de uren die wel gegeven worden, voor de kwaliteit van de kennis die de leerlingen hebben als ze de eindstreep halen en voor het aantal leerlingen dat wiskunde volgt tot de eindstreep?*'

De discussie

Voorzitter Hans van Lint opent de discussie door Prof. Van der Blij te citeren, die helaas niet aanwezig kon zijn maar wel schriftelijk gereageerd heeft op de onderwerpen. Over dit onderwerp schrijft Van der Blij dat 'het verdwijnen van de mondelinge examinering (de oude gymnasium-traditie) al een ernstige achteruitgang van kwaliteit betekende, en dat het verdwijnen van mondeling onderwijs nog veel ernstiger gevolgen zou kunnen hebben'.
Wim Kleijne: Er gaat een beeld ontstaan in Nederland over hoe het studiehuis moet worden ingericht: minder contacturen, zelfstandiger werken, etc. Zelf denk ik dat dit een misvatting is. De taak van de leraar wordt niet makkelijker maar moeilijker. Je kunt twisten over het aantal klassikale lessen, dat moet elke sectie voor zich bepalen. Maar het aantal uren dat nodig is voor adequate begeleiding zal niet afnemen. Als de politiek van het schoolmanagement minder contacturen is, dan gaat dit ten koste van de kwaliteit van het onderwijs. Vaksectie, 'let op uw saeck', bekijk vanuit het vak hoe je het moet inrichten. Voor mij staat vast dat het aantal uren niet minder zal zijn en dat de taak van de docent intensiever zal zijn.
Het beeld van de achteroverleunende docent is ver bezijden de waarheid. De inspectie bezint zich op contact hierover met de scholen, maar de scholen zijn eerst zelf aan bod.
Marja Bos (wiskundedocent en Universiteit Groningen): Ik heb lang gedacht dat leerlingen wiskunde B niet zelfstandig konden doen. Maar ik heb gemerkt dat dat toch wel kan, je zou ze best een studiewijzer en volledige uitwerkingen kunnen geven. Daarmee zouden de exameneisen gehaald kun-

nen worden. Maar de vraag is wel, of we dat willen. Voor reflectie, zoals gesprekken op het vlak van redeneren, is interactie nodig, en dus juist wel veel contacturen.
Wim Kleijne: Ja, en dat andere gedeelte, die reflectie, is een wezenlijk onderdeel van het examen. Geprogrammeerde instructie leidt niet tot een adequate voorbereiding op het examen en dus zijn de contacturen noodzakelijk.
Roel van Asselt: Het gaat er maar om wat er op het examen gevraagd wordt.
Anne van Streun: Geprogrammeerde instructie met nauwe doelstellingen zie ik veel gebeuren en ik vind dat de verkeerde weg.
Marja Bos: Ja, dat is precies het gevaar, als het examen in die richting bijgesteld wordt.
Wim Kremers: Ik ben nu 15 jaar bezig met leerlingen zo zelfstandig mogelijk te laten werken en met het maken van materiaal dat daarbij nodig is. Leerlingen moeten hun gevoel voor eigenwaarde behouden en hun vertrouwen in eigen kunnen. Er komt straks een grote markt voor bijles in wiskunde. De leerlingen lopen finaal vast in de zelfwerk-uren. Het werkt alleen als er materiaal is dat voor de leerlingen geschikt is. Intelligente leerlingen hebben ander materiaal nodig dan leerlingen die moeite hebben met de stof. Als docent moet je kunnen inspringen, sturen, richting geven.
Van der Blij schrijft het mooi: ‘Je hebt mensen nodig die aanvoelen wie er hulp nodig heeft, en wie je kunt laten gaan.’ Wie kunnen dat? We dachten in het begin dat het materiaal dat we maakten docent- onafhankelijk is, maar dat blijkt niet zo te zijn. Je moet er een bepaalde persoon voor zijn.
Jan Maassen (oud bestuurslid NVvW): Er zijn twee soorten studiehuis, dat van de overheid en dat van de docent, die het zelf moet maken en inrichten.
Wim Kremers: Ik zie graag verslagen van scholen die hier al wat verder mee zijn, bijvoorbeeld in Euclides.
Kees Lagerwaard (medewerker Cito): Ik wil een lans breken voor het studiehuis. Een combinatie van contacturen, individueel werken en groepswerk, de leraar die resumeert en uitlegt en de leerlingen stimuleert. Als het lesmateriaal er meer op gemaakt is, opdrachten aan leerlingen meer variëren in type en omvang en dergelijke, dan kan de opbrengst veel groter zijn.
Ik ga er wel vanuit dat de docent hetzelfde aantal uren houdt.
Marian Kollenveld: De randvoorwaarden zijn er nu niet, de klassen zijn te groot met 32 leerlingen, Ik wil het graag en ben het met je eens, maar de randvoorwaarden moeten duidelijker zijn.
Peter Kop: Het moet niet zo zijn dat de leerlingen de docenten minder zouden zien. Leerlingen hebben grote moeite om zelf de diepte in te gaan, zelf dingen uit te werken.
Anne van Streun: Ik zie wel mogelijkheden, als de docent daar de kans toe krijgt. Bijvoorbeeld in de praktische opdrachten en de onderzoeksopdrachten. Bij wiskunde lopen we daarmee achter, vergeleken bij andere vakken. Bijvoorbeeld modelleren kun je ook zo leren.
Marja Meeder: ‘Studiehuis’ is een mooi gekozen woord, omdat het aangeeft dat het leren van de leerlingen centraal moet staan. Het wordt echter vaak zo organisatorisch benaderd, en niet vanuit het leren van de leerling en de inhoud.
Het is goed te zoeken naar een doorbreking van een manier van werken. Natuurlijk blijft het contact met de docent heel belangrijk. Het studiehuis is niet volgend jaar klaar, maar het is wel een mooi doel om naar toe te werken.
Hans van Lint: In hoeverre moeten wij zeggen dat het studiehuis voor wiskunde anders is dan voor andere vakken?
Jan Maassen: Bij de talen kwamen de leerlingen vroeger nooit naar de facultatieve lessen vlak voor het examen en de docenten gingen koffiedrinken. Maar bij wiskunde kwamen ze wel, omdat ze problemen met de stof hadden.
Wim Kremers: Het is niet alleen de docent, maar ook het geschreven materiaal dat zo belangrijk is. De tijd om dit materiaal te ontwikkelen en rustig op te bouwen is echter te kort.
Marja Meeder: Anderzijds hebben de methoden grote schrijversteams aan het werk.

Alhoewel ook over dit onderwerp nog veel meer te zeggen zou zijn, moet de voorzitter de discussie afsluiten, want de tijd is om en de volgende vergadering staat alweer voor de deur.

Rondvraag
In de rondvraag krijgen de aanwezigen de gelegenheid hun laatste hartenkreten te uiten.
Wim Kremers: Bij de invoering van de basisvorming zijn kardinale fouten gemaakt. Voor de leerlingen die wat extra’s in hun mars hebben, is te weinig gedaan. Ze halen achten in de onderbouw zonder te werken, en in de vijfde zijn ze dan afgebrand, omdat ze niet geleerd hebben wat studeren is. Een echte mavo-leerling en een echte havo-leerling kunnen met het materiaal wat we nu hebben niet samen in één klas.
Iedereen heeft het recht onderwijs te krijgen wat bij zijn of haar niveau past.

Ten slotte
Deze eerste Raad van Wijzen werd door zowel bestuur als genodigden als zeer inspirerend ervaren. Tegelijkertijd is het bestuur er zich zeer wel van bewust dat de stem van de modale wiskundedocent in dit gezelschap wat minder geklonken heeft.
U kunt daar alsnog iets aan doen, bijvoorbeeld door schriftelijk te reageren op deze discussie, naar de voorzitter of de secretaris van de NVvW.
Als u over e-mail beschikt, kunt u ook discussiëren met collega’s via de WiskundE-brief (zie Euclides 73-1).

Het bestuur van de NVvW

Notulen jaarvergadering 1996

Notulen van de algemene vergadering van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag 16 november 1996, gehouden in het vernieuwde gebouw van het Nieuwe Lyceum te Bilthoven.

Om even over tien opent de voorzitter, dr. J. van Lint, de vergadering. Hij spreekt zijn dankbaarheid erover uit dat er een goede belangstelling is. Een belangstelling waaruit valt op te maken dat de zaak van het wiskundeonderwijs in Nederland velen ter harte gaat. Juist in een tijd van grote veranderingen is dit bemoedigend. De studiedag die verbonden is aan de algemene vergadering is getiteld:'Vernieuwing, nuttig en recreatief' en heeft dus alles te maken met deze vernieuwing.
De voorzitter verwelkomt alle aanwezigen. Een speciaal woord van welkom richt hij aan de afvaardiging van de inspectie, de delegatie van de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars, vertegenwoordigers van enkele onderwijsorganisaties en tenslotte een welkom aan de aanwezige ereleden.

Vervolgens spreekt de voorzitter de jaarrede uit. (Deze jaarrede kunt u vinden in Euclides 72-5, p.203 e.v.)
Hierna worden de notulen van de algemene vergadering van 11 november 1995 aan de orde gesteld.
Collega A. Keultjes uit Delft vraagt aandacht voor de 4e kolom, 2e pagina. Hij merkt op dat hij de opmerkingen die hij gemaakt had naar aanleiding van zijn ongerustheid over de manier waarop vele kleine scholengemeenschappen uren wiskunde laten verdwijnen, onvoldoende juist weergegeven vond.
De voorzitter onderbreekt dit onderdeel van de vergadering aangezien de burgemeester van Bilthoven ter vergadering is verschenen. De notulen worden, op het punt van dhr. Keultjes na, onder dankzegging aan de secretaris vastgesteld.
De voorzitter zegde toe met dhr. Keultjes te spreken.
De komst van de burgemeester had zijn bedoeling. Na door de voorzitter welkom te zijn geheten memoreerde de burgervader over een persoon met bijzondere kwaliteiten, een volle inzet voor het algemeen belang van de wiskunde en in het bijzonder ten dienste van de Vereniging. ‘Ik heb het over dhr. Felix Gaillard, penningmeester, administrateur, organisator van studiedagen en examenbesprekingen, van regiovergaderingen en voor het verzorgen van alles wat maar door de vereniging van belang werd geacht. De spin in het web van de vereniging. Vraagbaak voor leden en oud-leden.’. Voor al deze verdiensten mocht Felix zich ridder noemen in de orde van Oranje Nassau. Dhr. Gaillard was zeer vereerd en bedankte in korte bewoordingen.

Het jaarverslag, augustus 1995 t/m juli 1996, wordt onder dankzegging aan de secretaris vastgesteld.

Het financieel jaaroverzicht en de begroting worden zonder meer goedgekeurd onder dankzegging aan de penningmeester. De voorzitter stelt de vergadering voor om de penningmeester décharge te verlenen. De vergadering heeft geen bezwaar.

Dhr. R. Bloem neemt afscheid als lid van het bestuur. De voorzitter bedankt dhr. Bloem voor zijn inzet. Dhr. W. Kuipers zal het secretariaat overnemen.
Dhr. Jongeling en dhr. Schaafsma treden periodiek af maar stellen zich herkiesbaar. De vergadering gaat akkoord met de herverkiezing. In de vacatures voor dhr. J.J. Breeman en dhr. R.J. Bloem worden door de vergadering gekozen mw.drs. H.B. Verhage en dhr. P.G.M. Kop.

De vergadering stemt ermee in dat de contributie voor 1997-1998 *ƒ* 75,– zal bedragen.

De voorzitter verzoekt de vragen voor de rondvraag uiterlijk tijdens de lunch en bij voorkeur schriftelijk in te dienen.

Dhr. A. Goddijn krijgt gelegenheid om de studiedag in te leiden.
Het huishoudelijke deel van de jaarvergadering wordt om 15.45 uur voortgezet met de behandeling van de rondvraag.
De voorzitter heeft met dhr. Keultjes een gesprek gehad. Het bleek dat dhr. Keultjes veel duidelijker in de notulen had willen terugvinden, dat hij gewaarschuwd had voor ernstige inkrimpingen van het aantal wiskunde-uren.
De voorzitter benadrukt plenair dat nog lang niet alle problemen rond de invoering van de plannen rond vbo/mavo en de Tweede Fase zijn opgelost. Het bestuur volgt de ontwikkelingen en zal adequaat reageren ook als het gaat om rechtspositionele zaken.
De mening wordt gepeild of het niet beter is om de jaarvergadering op vrijdag te doen plaatsvinden. Er zijn nogal wat bezwaren, bijvoorbeeld lesuitval. Uiteindelijk blijken vijf van de aanwezigen vóór de vrijdag te zijn. Gevraagd wordt om de uitslag van de gehouden enquête over de basisvorming met de achterban te bespreken.
Ten slotte bedankt de voorzitter de kascommissie en deelt mee dat de nieuwe kascommissie is benoemd.
Vermeldenswaard is dat we voor de tiende keer bijeen zijn in het Nieuwe Lyceum. De voorzitter bedankt de vele mensen die bijgedragen hebben aan het succesvolle verloop van de studiedag.
De zaal onderstreept deze dank met een applaus.
Om 15.58 uur sluit de voorzitter de vergadering en wenst ieder een goede reis huiswaarts.

W. Kuipers

Verslag van het verenigingsjaar

1 augustus 1996 - 31 juli 1997

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld:

dr. J. van Lint, voorzitter
W. Kuipers, secretaris
drs. S. Garst, penningmeester
mevr. drs. M.P. Kollenveld,
vice-voorzitter

overige leden:
mevr. A.F.S. Aukema-Schepel
R.J. Jongeling
P.G.M. Kop
F.J. Mahieu
S.H. Schaafsma
mevr. drs. H.B. Verhage.

Ook dit verenigingsjaar was een jaar waarin het bestuur zich geconfronteerd wist met veel ontwikkelingen. Ontwikkelingen met betrekking tot de eerste en tweede fase. De ontwikkelingen brengen mee dat het bestuur steeds meer wordt gevraagd om op veel notities en plannen commentaar te leveren. Dit vraagt van het bestuur om voortdurend in gesprek te zijn met de achterban om te komen tot verantwoorde adviezen. Het gaat immers om beleid waar leerlingen voor jaren mee te maken hebben.

Jaarvergadering

Op zaterdag 16 november werd de jaarvergadering gehouden te Bilthoven. Felix Gaillard werd geridderd in de orde van Oranje Nassau. Over de grote betekenis van Felix is in het vorige jaarverslag reeds melding gemaakt aangezien we toen afscheid van hem hebben genomen.
De jaarvergadering werd ook dit jaar gecombineerd met een studiedag met als thema: 'Vernieuwing: nuttig en recreatief'. De veranderingen in het gebied 12-16 en de gevolgen daarvan voor het vbo/mavo kregen aandacht. Prof. dr. R. Tijdeman van het Mathematisch Instituut van de Rijksuniversiteit Leiden verzorgde een lezing waar ingegaan werd op wat we mogen verwachten van een eerstejaars student op wiskundig gebied. Marianne Lambriex en Wim Kuipers brachten in een dialoog, met Sjoerd Schaafsma als souffleur van het ministerie, helderheid met betrekking tot de vraag wat de verschillen zijn tussen het examenprogramma vbo/mavo nu en het programma dat past bij de invoering van de leerwegen. Aan het eind van de middag genoten we van de sprankelende lezing van dr. Æ. Hoekstra van het Lorentz Casimir Lyceum in Eindhoven onder de titel 'Meneer, meneer, …, gaan we vandaag iets leuks doen?'
Daarnaast werd er in workshops van gedachten gewisseld over de herprofilering bij havo en vwo en de gevolgen voor de inhoud en vormgeving op wiskundig gebied. Zie voor een verslag Euclides 72-4, p.175.

Tweede Fase

Over de invoering van de Tweede Fase bestaat nu meer duidelijkheid. Vanuit het bestuur hebben we het ministerie onze bezorgdheid meegedeeld over de invoering. De resultaten van de experimenten van het PROFI-team krijgen te weinig tijd voor heroverweging en bijstelling. Ook het platform VVVO (Vakinhoudeljke Verenigingen in het Voortgezet Onderwijs) heeft een en andermaal op uitstel van de invoering van de Tweede Fase aangedrongen.
Het bestuur heeft bij de Stichting Leerplan Ontwikkeling een veldaanvraag ingediend voor onderzoek naar de mogelijkheden van een zinvolle en verantwoorde toepassing van informatietechnologie in het wiskundeonderwijs, met name gericht op het inpassen in het programma van de vernieuwde Tweede Fase havo/vwo. Na een eerste afwijzing kon er toch in dit verslagjaar mee worden gestart.
Bij de totstandkoming van de eindtermen havo/vwo, Tweede Fase zijn we als bestuur betrokken geweest.
Over het plan van de CEVO voor een snelle invoering van de symbolische rekenmachine werd door het bestuur een advies geformuleerd. Het bestuur adviseerde om voordat tot invoering zou worden overgegaan een onderzoek te laten plaatsvinden over de didactiek die aan invoering ten grondslag dient te liggen. Het bestuur sprak hiermee in zekere zin zijn zorg uit over het feit dat eventuele te snelle invoering het risico zou meebrengen dat docenten er te zeer door belast zouden worden bij alle veranderingen waaraan ze eveneens vorm hebben te geven.

vbo/mavo

Met de CEVO hebben we gekeken naar de mogelijkheid om de docenten een handreiking te geven bij de opleiding voor de nieuwe examens vbo/mavo. Op verzoek van het bestuur werd naar de scholen een brief verzonden waarin de schoolleiding erop werd gewezen dat de wiskunde-examens voor het eerst volgens het nieuwe programma zouden worden afgenomen. Hierbij hoort verandering van docentengedrag en aanpassing van leermateriaal.
De herziene kerndoelen zullen in augustus worden ingevoerd. Het ministerie van O en W vroeg het bestuur om op de concept-voorstellen te reageren. Het bestuur heeft een reactie aan het

ministerie doen toekomen. Zie Euclides jaargang 72-6 p. 239.
Vakontwikkelgroepen hebben onder leiding van de SLO concepten gemaakt voor de nieuwe examens vbo/mavo in het kader van de invoering van het leerwegstelsel. In november 1996 werden deze concepten de staatssecretaris aangeboden.
Een tweetal leden van het bestuur maakte deel uit van de ontwikkelgroep voor wiskunde. Op de voorstellen van die groep is door het bestuur gereageerd in een brede notitie, reeds gepubliceerd in Euclides 72-8.
Voorafgaande aan het verzenden van de notitie heeft het bestuur het veld geraadpleegd. Een aantal mensen uit het praktijkveld werd uitgenodigd om commentaar te leveren op de voorstellen van de vakontwikkelgroep.
We hopen dat de staatssecretaris met een aantal door het bestuur gemaakte opmerkingen rekening zal willen houden.
Naast de programma's heeft de adviescommissie examinering vbo/mavo een notitie opgesteld waarin een weg gewezen wordt naar een geharmoniseerde en flexibele examenstructuur voor vbo en mavo. Het bestuur zal de notitie nauwkeurig bestuderen en het ministerie een reactie doen toekomen.

I&I

De gezamenlijke aanvraag bij de SLO van I&I (Informatica en Informatietechnologie) en het bestuur van de NVvW is toegewezen. Het project is in januari van start gegaan. We zijn dankbaar dat de SLO onderzoek zal doen naar de mogelijkheden tot zinvolle en verantwoorde toepassing van informatietechnologie in het wiskundeonderwijs.

Aansluiting lang-mbo

Het bestuur heeft de SLO bovendien gevraagd een wiskundeproject te starten dat zich richt op het optimaliseren van de aansluiting van 4 vbo/mavo en diverse vormen van lang-mbo in het voorgenomen leerwegstelsel door onderzoek en materiaalontwikkeling.
De aanvraag werd door de SLO gehonoreerd. Ook hier participeert een tweetal leden van het bestuur in een resonansgroep. Deze groep denkt mee en draagt ideeën aan.

Regionale bijeenkomsten

Regionale bijeenkomsten waren er op 11, 13 en 18 maart resp. in Zwolle, Leiden en Eindhoven. Voor het eerst heeft het bestuur ook een plenaire voordracht laten houden. De voordrachten werden verzorgd door P. Drijvers, A. Verwey en J. van der Craats over de mogelijkheden van de symbolische rekenmachine.
Het aanbod van workshops was rijk gevarieerd en stond in relatie met de huidige ontwikkelingen en veranderingen. Veel werk rondom de organisatie mocht worden beloond met een goede opkomst. Het bestuur meent hierin een signaal te zien dat deze bijeenkomsten in een behoefte voorzien.

Examenbesprekingen

Dit jaar namen de vbo/mavo-eindexamen kandidaten allemaal deel aan het examen op basis van het nieuwe programma. De examenbesprekingen vroegen veel zorg en werden door meer docenten bezocht dan in voorgaande jaren. Voor het eerst waren er tevens besprekingen rondom het B-examen.

MTO

De vernieuwingen van het wiskundeonderwijs in het MTO krijgen hun vorm door het TWIN-project. Het platform van/voor MTO-docenten, een werkgroep van de NVvW is nauw betrokken bij de vernieuwingen.
Het bestuur heeft in het voorjaar uitvoerig met medewerkers van het TWIN over de ontwikkelingen gesproken. Het bestuur acht dit contact van belang mede doordat een groot leerlingenbestand van het vbo/mavo ermee te maken zal krijgen.

Vertegenwoordiging

Ook in het afgelopen jaar wist het bestuur zich vertegenwoordigd in het platform VVVO, de NOCW en de B-federatie. Juist om invloed uit te kunnen uitoefenen op het werk van beleidsmakers en overheidsinstanties acht het bestuur vertegenwoordiging van belang.
Het Wereldwiskunde Fonds wordt gelukkig door veel leden van de NVvW gesteund. Voor onze zusterorganisatie Zame in Zambia is het ontwikkelen van bijscholingsmateriaal van start gegaan.

Ten slotte

De werkzaamheden van het bestuur nemen elk jaar weer toe. Het een en ander staat voor een groot deel in verband met de veranderingen en vernieuwingen. Het bestuur wordt gevormd door docenten die als vrijwilligers bereid zijn die werkzaamheden uit te voeren. Er bestaat dan ook binnen het bestuur naast reorganisatie de behoefte aan professionalisering.
De werkdruk neemt ook toe doordat het ministerie aan organisaties waarbinnen het bestuur is vertegenwoordigd steeds vaker advies vraagt.
Het bestuur heeft aan een groep studenten van de Hogeschool voor Economische Studies (HES) te Rotterdam gevraagd om in het kader van een afstudeeropdracht advies te brengen omtrent de mogelijkheden voor eventuele verbeteringen van de positie van de NVvW. Eind juni hebben zij hun eindverslag gepresenteerd met aanbevelingen die verder nog door het bestuur bestudeerd moeten worden.

W. Kuipers

Jaarvergadering/ Studiedag 1997

Zaterdag 15 november 1997
Heeft u zich al aangemeld?

Informatie: Euclides 73-1, p.19 e.v. of tel. 0411-673468.

INTERVIEW

Vernieuwing in het MBO

'Probeer je onzekerheid met collega's te delen, je leert er veel van'

Henk Baas, 47 jaar, is al 23 jaar in het onderwijs. Vanaf 1980 is hij werkzaam aan de MTS in Zwolle die na diverse fusies uiteindelijk in augustus 1997 is opgegaan in het ROC Zwolle, het Deltioncollege. Hij verzorgt voor wiskunde het onderwijs op de afdeling werktuigbouwkunde. Afgelopen schooljaar heeft hij met zijn leerlingen gewerkt met het TWIN-materiaal in het nieuwe wiskundeprogramma voor het MTO. In het schooljaar 1997-1998 volgen de afdelingen bouwkunde en weg- en waterbouw. De afdeling elektrotechniek wacht nog een jaartje.

Wat zijn belangrijke punten in jouw wiskundeles?
In mijn lessen vind ik het belangrijk dat de leerlingen probleemoplossend leren te denken en te handelen. Niet trucmatig te werk gaan maar meer op inzicht. De bedoeling is dat ze de geleerde vaardigheden en inzichten gebruiken in de technische vakken. Ook probeer ik in de gaten te houden dat een goede aansluiting met het HBO gegarandeerd wordt.



Zijn de leerlingen erg veranderd in de tijd dat je aan de MTS werkt?
De school staat voor de leerlingen niet meer op de eerste plaats. Er zijn, vergeleken met vroeger, meer activiteiten buiten school belangrijk geworden; uitgaan, hobby's, sport, een baantje erbij. Was vroeger na het weekend het huiswerk altijd gedaan, nu krijg ik vaak te horen 'geen tijd voor gehad'. Laatst nam een docent, met 40 jaar onderwijs achter de rug, afscheid. Hij vertelde de volgende anecdote. 'De directeur van zijn instelling was er, het speelde zo'n twintig jaar geleden, achter gekomen dat een elektro-leerling een baantje zocht. De directeur kon de leerling niet direct opsporen, maar de leraren kregen wel te verstaan dat ze niet genoeg huiswerk opgaven. Anders kon deze leerling toch geen bijbaantje nemen,waar haalde hij de tijd vandaan?'
Je kunt ook wel merken dat de laatste jaren de belangstelling voor techniek wat is afgenomen. Het is vaak de tweede keuze. Toch zijn de meeste leerlingen redelijk gemotiveerd, vooral met de 'doorstromers' is het plezierig werken. Helaas ziet het ernaar uit dat de doorstroming naar het HBO door maatregelen van de minister ernstig bemoeilijkt zoniet afgesloten zal gaan worden.

Je werkt, heb ik begrepen, in het nieuwe programma met het TWIN-materiaal. Ben je hierdoor veranderd in je kijk op de plaats van wiskunde in het MTO?
Eigenlijk kijk ik er nog steeds hetzelfde tegenaan. De wiskunde die mijn leerlingen krijgen, moet ze kunnen helpen bij de technische vakken. In het programma moet de leerling duidelijk worden wat de functie van de wiskunde in de techniek is. Het is wel even wennen aan contextwiskunde en toepassingen. Vroeger was het

programma overzichtelijker. Je kon een aantal wiskundige technieken opnoemen die de leerlingen moesten beheersen. Dat kan nu niet meer. Er komt veel meer kijken bij het oplossen van een probleem in een context. Dat geeft je ook als docent een onzeker gevoel. Er zijn meerdere aanpakken mogelijk. Het onzekere gevoel in zo'n eerste jaar van een experiment wordt ook versterkt doordat je niet weet wat komen gaat. Je hebt nog geen overzicht over de hele leergang. Bovendien is het wel te hopen dat de technische boeken zullen worden aangepast, inhoudelijk en ook voor wat betreft het gebruik van de grafische rekenmachine.



Hoe werken jij en je leerlingen met het nieuwe materiaal in de klas?
Vroeger heb ik klassikaal-frontaal les gegeven, hoewel in elke klas verschillend. Nu werken de leerlingen zelf samen aan opdrachten. Ik loop rond, stel vragen en help ze. Mijn rol is meer begeleidend geworden. Over belangrijke en moeilijke problemen houd ik met de groep een klassengesprek. Je moet je als docent nu veel meer aanpassen aan de leerlingen en veel je oor bij hen te luisteren leggen, je verdiepen in hun oplossingen. De leerlingen van hun kant kunnen zich niet meer verschuilen in de klas, het 'bord even overpennen'. Ze moeten echt met de leerstof tijdens de les aan de gang. Leerlingen die op het Greijdanus in Zwolle het nieuwe experimentele mavo-programma hebben gehad zijn veel meer gewend aan deze andere werkwijze dan leerlingen uit het oude programma. Dus vooral in het begin van het jaar waren er op het punt van 'zelfstandig werken' wel verschillen in de groep. In de loop van het schooljaar zijn die veel kleiner geworden.
De leerlingen uit het oude programma vinden de wiskunde in het begin maar 'vaag'. Van hen hoorde ik vaak: 'Wat moet ik eigenlijk leren?' en 'Geef mij maar oude wiskunde.' De leerlingen uit het nieuwe programma daarentegen zijn nergens verbaasd over en klampen zich veel minder aan allerlei regeltjes vast. Zij hebben wel weer minder algebraïsche vaardigheden in huis dan de leerlingen in het oude programma.
Een plezierig punt vinden de leerlingen de herkenbaarheid van de wiskunde die ze krijgen voorgeschoteld. Ook het feit dat ze niet meer een uur lang naar mij, de leraar, hoeven te luisteren, ook over zaken die velen allang snappen, is een positief punt voor de leerlingen.

Wat vind jij moeilijk in het nieuwe programma?
Ik ben 22 jaar bezig geweest in het 'oude systeem'. Met dit materiaal is mijn rol als docent plotseling heel anders geworden. De leerlingen verwerven kennis en doen vaardigheden op door zelfstandig en samen te werken aan problemen en ik begeleid ze daarin. Dat is een grote omschakeling. Ook de inhoud is heel anders geworden; in het begin leek het wel natuurkunde.
Controleren wat ze geleerd hebben is veel moeilijker geworden. Het maken van een toets is een tijdrovende klus geworden. Het beste is, denk ik, hierbij stevig met andere docenten samen te werken. Er zou landelijk een toetsenbank moeten worden opgezet.
We werken in de wiskundeles met de grafische rekenmachine. Een probleem hierbij is dat de leerlingen het apparaat dit eerste jaar nog niet mee naar huis mee konden nemen. De beschikbare leerlingenset moest op school blijven. Volgend jaar proberen we dat anders te regelen. We zitten wel met de moeilijkheid hoe we de kosten voor de leerlingen beperkt kunnen houden. Een ander punt is dat de leraren van de technische vakken nog niet of onvoldoende op de hoogte zijn van de mogelijkheden van de grafische rekenmachine. Technische boeken zijn hierop nog in het geheel niet aangepast. Een en ander heeft zijn tijd nodig.

Heb je nog tips voor collega's die het komend schooljaar met het nieuwe programma starten?
Ik zou zeggen: probeer open te staan voor de nieuwe ontwikkelingen. Als je gewend ben om klassikaal-frontaal les te geven probeer dan eens wat te variëren en zoekend je lesmethodiek te veranderen. Probeer verder niet geïsoleerd te werken maar houd contact met collega's binnen en buiten school. Praat veel met collega's over wat er wel en wat niet goed gaat. Probeer je onzekerheid met collega's te delen, je leert er veel van.

Wim Laaper

bespreking

H. A. Klomp
De relativiteitstheorie in Nederland, breekijzer voor democratisering in het interbellum
Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1997
ISBN 9050410456
prijs *ƒ*42,50

Dit boek is de handelseditie van het proefschrift van de auteur waarop hij op 27 maart 1997 te Groningen gepromoveerd is. Het gaat in dit boek niet om de relativiteitstheorie zelf, maar op de invloed daarvan op het culturele leven in Nederland in de periode tussen de twee wereldoorlogen. Voor de lezers van Euclides lijkt het mij in ieder geval interessant om in dit boek te lezen hoe bepaalde aspecten van de relativiteitstheorie een rol hebben gespeeld in de discussies rond het meetkunde- en het mechanica-onderwijs. Onderdelen van die discussies speelden ook bij de invoering van het leerplan van W12-16, en spelen weer bij de komende invoering van de Tweede Fase. De belangrijkste deelnemers aan de discussie toen waren Dijksterhuis, Kohnstamm, Mw. Ehrenfest-Afanassjewa en Freudenthal. De vormende waarde van het wiskundeonderwijs loopt als een rode draad door de discussie. Mw. Ehrenfest-Afanassjewa was getrouwd met de natuurkundige Ehrenfest, de opvolger in Leiden van Lorentz, één van de wegbereiders van Einsteins relativiteitstheorie. Zij verdedigde het standpunt dat het meetkunde-onderwijs voor iedereen een vormende waarde had, indien de logisch-deductieve methode in Euclides' Elementen vervangen werd door een nieuwe didactiek: op basis van aanschouwelijke oefeningen met meetkundige figuren, waaruit intuïties en voorstellingen voortvloeiden, gingen de leerlingen zelfstandig meetkundige hypothesen opstellen en daaruit meetkundige beweringen deduceren. Zij wilde de voor iedereen gelijke empirische werkelijkheid tot object van haar meetkundecursus maken. Zelfstandig leren denken was een van haar uitgangspunten. Kohnstamm was oorspronkelijk natuurkundige, maar het grootste deel van zijn leven voorvechter van de democratisering van Nederland, het afschaffen van de standenmaatschappij. Daarbij zag hij het onderwijs als het belangrijkste middel. Hij had een ethiek ontwikkeld die waarlijk democratisch wilde zijn. Daarbij nam hij afstand van de van Plato afkomstige idee dat de geschoolden dichter tot de ideële waarheid genaderd zijn en daardoor beter een objectief moreel oordeel kunnen vormen. De relativiteitstheorie was voor hem een belangrijk wetenschappelijk argument: hij was tot het besef gekomen dat principiële onzekerheid het noodlot was van de beperkte mens die toch (gewetens)beslissingen moet nemen. Hij betuigde ten volle zijn steun aan Mw. Ehrenfest-Afanassjewa. Dijksterhuis, leraar wiskunde aan de Rijks-HBS te Tilburg, was de belangrijkste opponent. Hij was bang dat ideeën als die van Mw. Ehrenfest-Afanassjewa ertoe zouden leiden dat het wiskundeonderwijs in omvang gereduceerd zou worden, en dat het karakter ervan zou veranderen. Hij was voorstander van een op platoonse leest geschoeid wiskundeonderwijs, waarbij geen overmatige aandacht aan technische vaardigheden gegeven werd, de empirie geminacht en het meetkundeonderwijs streng logisch-deductief gestructureerd. Hij werd secretaris van de leerplancommissie-Beth die was ingesteld om tot een verbetering van het wiskundeonderwijs in platoonse richting te komen. De strijd tussen de 'platonisten' en 'empiristen' werd gevoerd rond twee strijdpunten. Wie mochten het mechanica-onderwijs verzorgen: de wiskundeleraren zoals gebruikelijk was of de natuurkundeleraren? De wiskundigen volgens de commissie-Beth. Hoe moest het meetkundeonderwijs er uitzien: axiomatisch zoals bij Euclides of volgens de ideeën van Mw. Ehrenfest-Afanassjewa? Axiomatisch volgens Dijksterhuis. Eén van de platforms waarop deze polemiek gevoerd werd was het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde gewijd aan onderwijsbelangen, opgericht in 1924. Vanaf 1927 heet dat bijvoegsel Euclides, jaargang 4. Dijksterhuis en Beth waren er medewerkers van. De achtergrond van de strijd rond de mechanica was dat volgens Dijksterhuis de mechanica logisch-deductief was, uitgaande van de wetten van Newton als axioma's. Daarin is geen of nauwelijks plaats voor empirie. Op zijn hoogst zijn er experi-

menten ter bevestiging. De mechanica is echter een onderdeel van de natuurkunde. Sinds Einstein was het positivisme de karakteristieke houding van natuurkundigen, waarbij ideeën zolang ze niet empirisch geverifieerd konden worden, kritisch benaderd werden. Freudenthal beslechtte de polemiek rond het mechanica-onderwijs na de oorlog in deze zin. Vermeldenswaard hierbij is dat de auteur aantoont dat Dijksterhuis zijn magnum opus uit 1950, De Mechanisering van het Wereldbeeld, waarvoor hij in 1952 de P.C. Hooftprijs ontving, mede gebruikt heeft om zijn gelijk in de strijd rond het mechanica-onderwijs aan te tonen. Aan het eind van zijn boek maakt de auteur de balans op. Voor het onderwijs luidt die als volgt. De belangrijkste invloed van de relativiteitstheorie was de verandering in het denken over de exacte wetenschappen, waardoor uiteindelijk de democratisering van het middelbaar onderwijs mogelijk is geworden. De platoonse pedagogiek heeft een remmende werking op deze democratisering gehad. Met het opgeven ervan verdween een traditioneel selectiemiddel en kwam er ruimte voor de hervorming waaraan Kohnstamm al in het begin van deze eeuw de eerste impuls had gegeven. Voor de functie van de wiskunde citeert hij de wiskundige en logicus Beth, zoon van de voorzitter van de commissie-Beth: de wiskundige denkvorm kan in een democratie als het ware de kwaliteit van de democratische discussie garanderen. Want alle deelnemers aan de geschetste didactische discussie geloofden uiteindelijk in de controlerende functie van het formeel-logische denken. Zij bestreden slechts het extreme standpunt van Dijksterhuis, dat principieel geen gerichtheid op de ervaring binnen het onderwijs toestond. Zij wilden, al was het maar achteraf, dat er een axiomatische fundering of een formeel-wiskundige beschrijving of een logische bewijsvoering aan het meetkunde- of mechanica-onderwijs toegevoegd werd.
Voor mij was het boek vooral interessant voorzover het over het wiskunde- of mechanica-onderwijs ging. Alle meer filosofische overwegingen van de betrokkenen - en dat zijn er veel meer dan de hier genoemde -, die een groot deel van het boek beslaan waren niet gemakkelijk toegankelijk. De poging om de relativiteitstheorie op een begrijpelijke wijze weer te geven kan zeker geslaagd genoemd worden, de beschrijving met behulp van de Minkofski-ruimte echter niet.

Bert Zwaneveld

Bovenbouwtraject Prima Donna

Midden oktober 1997 verschijnt een *gratis lespakket* voor decanen en docenten wiskunde en natuurkunde die onderwijs verzorgen aan leerlingen in de bovenbouw van het voortgezet onderwijs (havo/vwo). Het lespakket is een onderdeel van het project 'Prima Donna': **Techniek in Beeld**. Het project, een initiatief van de Hogeschool van Utrecht, stelt zich ten doel de houding van jongeren t.a.v. techniek positief te beïnvloeden.
Het lespakket wordt voorafgegaan door de achtdelige televisieserie *Buskruit*. Vanaf 3 november (Ned. 2, 19.30 uur) kunnen uw leerlingen, maar u zelf ook, het wel en wee volgen van vijf technische studenten die echte problemen van echte mensen en bedrijven proberen op te lossen door techniek in te zetten. De aansluiting bij de leefwereld en de informatiebehoefte van jongeren die voor de studiekeuze staan vormt de leidraad voor de serie. De vorderingen van de studenten zijn ook te volgen op internet: HTTP:// buskruit.tros.com/
Ook het lespakket, bestaande uit een video en magazine, sluit in vorm en inhoud aan bij de informatiebehoefte van jongeren.
Na elke uitzending van Buskruit wordt een 06-nummer getoond waar het bijbehorende tijdschrift besteld kan worden; jongeren kunnen het tijdschrift, waarin informatie staat over het technisch beroepenveld en techniekopleidingen, kosteloos aanvragen.
De docentenhandleiding en leerlingenhandleiding kunnen zowel binnen het huidige onderwijs en de huidige voorlichting als bij de module 'Oriëntatie Studie en Beroep' in de vaklessen ingezet worden.

Wij nodigen u, als NVvW-lid, uit u in te schrijven voor het gratis lespakket. Ieder pakket bestaat uit een videoband, een docentenhandleiding, een lesbrief en maximaal 30 exemplaren van het tijdschrift. U ontvangt het lespakket uiterlijk 31 oktober 1997.

Heeft u vragen dan kunt u zich op werkdagen van 9.00 uur tot 17.00 uur richten tot *Louise Voorhagen of Sabine Hoksbergen, telefoonnummer 030 – 2308150/153*.

U kunt het Prima Donna Bovenbouwpakket aanvragen bij
PRIMA DONNA: TECHNIEK IN BEELD
Expertisecentrum Event
Faculteit Natuur en Techniek, Hogeschool van Utrecht
Antwoordnummer 4037 3500 VB Utrecht
Faxnummer: 030 - 2308100
o.v.v. Naam contactpersoon, naam, adres en tel. school.
U kunt aangeven hoeveel exemplaren van Buiskruit u wilt hebben (in tientallen).

Verschenen

Structuur
dr. P.M. van Hiele

Recent verschenen is de geheel herziene en geactualiseerde versie van Structuur, over begripsvorming en het leerproces in de meetkunde.
Het boek is zeer mooi vormgegeven met veel fraaie meetkundige figuren.
Een boek dat niet misstaat in de boekenkast van een wiskundedocent.
In één van de komende nummers van Euclides zal een recensie verschijnen.
ISBN: 9003 443742
Prijs: ca. *f* 79,50
Info: Thieme: 0575 594880

Wiskunde A-lympiade

Het Freudenthal instituut organiseert dit jaar voor de negende keer de wiskunde A-lympiade. Vorig jaar hebben ruim 3000 leerlingen deelgenomen. Dit jaar vindt de A-lympiade binnen een netwerk plaats. Op 31 oktober is er een netwerkbijeenkomst voor de docenten die zich daarvoor hebben aangemeld. De voorronde van de A-lympiade vindt plaats op vrijdag 28 november van 9.00 - 16.00 uur op de scholen. De finale is in het weekend van 3 en 4 april in Garderen. Informatie en aanmeldingsformulieren zijn begin september naar alle scholen gezonden.

Inlichtingen:
Mw. A. van der Heiden
tel. 030-2611611
fax 030-2660430
email: alympiade@fi.ruu.nl

40 jaar geleden

1073. Van een meetkundige reeks van 9 positieve termen is de som van de tweede en de achtste term p en die van de vierde en de zesde term q. Hoe groot is het product van de negen termen?

1074. Bewijs dat men in een harmonische reeks heeft:

$$t_1t_2 + t_2t_3 + \dots + t_{n-1}t_n = (n-1)t_1t_n.$$

1075. Gegeven een cirkel met middelpunt M. Gevraagd daarin een vierkant te construeren alleen met gebruikmaking van een liniaal.

W.A. v.d. Spek

1076. (O, R) is de omgeschreven cirkel van $\Delta A_1A_2A_3$. Het punt B_k is het midden van boog $A_iA_kA_j$; C_k is het tegenpunt van B_k op (O, R).
Bewijs: 1) de deellijnen der hoeken $A_kC_kB_k$ gaan door één punt S;
2) $OS = R\sqrt{3-2\Sigma \sin \frac{1}{2}\alpha_k}$

W.A. v.d. Spek

1077. Als z het totale aantal zijvlakken, p het aantal zijvlakken bij elk hoekpunt en n het aantal kantlijnen van elk zijvlak van een regelmatig veelvlak voorstelt, bewijs dan:

1° $z = \dfrac{4p}{2(n+p)-np}$;

2° laat met 1°. zien, dat er ten hoogste 5 regelmatige veelvlakken zijn;

3° laat zien, dat het aantal lichaamsdiagonalen bedraagt

$$\frac{zn(zn - np^2 - p + 2p^2)}{2p^2}$$

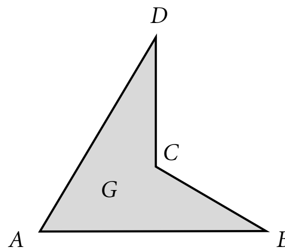
R.L. Sordam

Opgaven uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 45 (1957-1958)

Werkblad

Opgave 4 **Een pijlvormig gebied**

In de tekening hieronder zie je een gebied *G* in de vorm van een gelijkzijdige driehoek *ABD* waaruit driehoek *BCD* is weggehaald. Daardoor is de inham bij *C* ontstaan. Punt *C* is het snijpunt van de deellijnen van de oorspronkelijke driehoek. De lengte van *AB* is 3 cm.
De figuur is ook twee keer afgebeeld op de bijlage. De ene figuur is bestemd voor de beantwoording van vraag 5. De andere figuur kun je gebruiken bij de vragen 6, 7 of 8.



5 (5p) Teken in de figuur op de bijlage de iso-afstandslijn op 1 cm van gebied *G*.

Vanaf een bepaalde afstand *r* (in cm) bestaan de iso-afstandslijnen van *G* uit twee rechte lijnstukken en drie cirkelbogen.

6 (6p) Hoe groot is deze afstand *r*? Licht je antwoord toe.

7 (7p) Toon aan dat de iso-afstandslijn de lengte $6 + 2\frac{1}{3}\pi \cdot r$ heeft voor deze afstand *r*.

We letten nu op de verhouding tussen de lengte van de iso-afstandslijn en de afstand *r* tot de rand van het gebied *G*.
Deze verhouding heeft bij onbeperkte toename van *r* een limiet.

8 (6p) Hoe groot is deze limiet? Licht je antwoord toe.

Uit: Examen vwo Wiskunde B Profi

Werkblad

Opgave 5 **Iteratie**

De rij u_1, u_2, u_3, … is gegeven door:

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_n = f(u_{n-1}) \end{cases}$$

waarbij $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{6}$.

In onderstaande figuur zie je twee grafieken, de grafiek van f en de lijn $y = x$.
De figuur is ook afgebeeld op de bijlage.

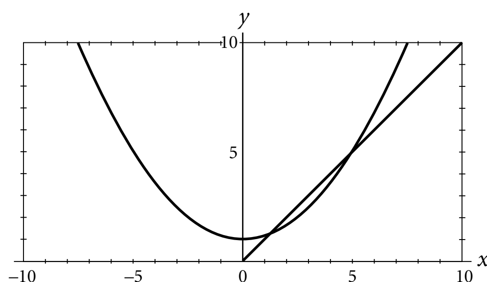
9 (5p) Teken in de figuur op de bijlage de plaats van u_5 op de x-as.
Gebruik hierbij alleen de getekende grafieken en niet de formules.

De rij u_1, u_2, u_3, … convergeert.

10 (5p) Bereken de limiet van de rij.

Ook voor een andere startwaarde dan $u_1 = 4$ kan de rij u_1, u_2, u_3, … convergeren.

11 (7p) Onderzoek voor welke startwarden de rij convergeert. Je mag hierbij gebruik maken van tekeningen op de bijlage.



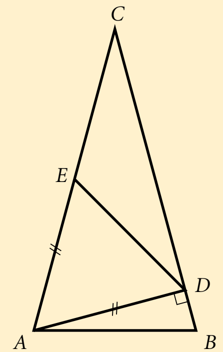
Recreatie

Opgave 681

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

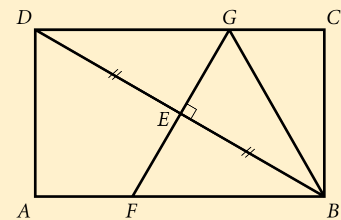
Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

Weinig woorden. Een tekening met gegevens is voldoende. Probeer ze eens. U zult de opgaven pas waarderen als u een oplossing gevonden hebt!



1 $\triangle ABC$ is gelijkbenig.
$AC = BC = 170$ en $AB = 88$.
$AD \perp BC$ en $AD = AE$.

Is nu ook $ED = EC$?

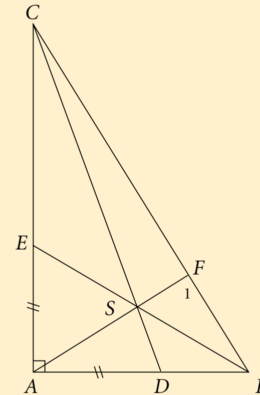


2 Rechthoek *ABCD*.
$AB = 97$ en $AD = 56$.
FG is middelloodlijn van *BD*.

Is $\triangle FBG$ gelijkzijdig ?

3 Bij driehoek *ABC* zijn de drie zijden, de oppervlakte en twee zwaartelijnen GEHELE getallen.
$AC = 102$ en $BC = 146$.

Bereken *AB*.

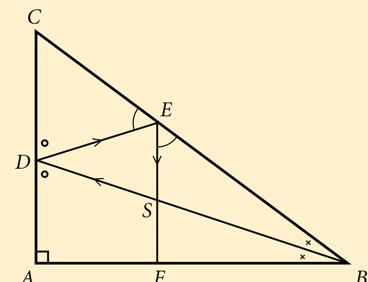


4 $\triangle ABC$ is rechthoekig.
$AB = 100$ en $AC = 150$.
$AD = AE = 60$.

Is $\angle F_1 = 90°$?

5 $\triangle ABC$ is rechthoekig.
$AB = 128$ en $AC = 93$.
Een lichtstraal uit *B* volgt de bissectrice van hoek *B* en weerkaatst bij de zijden *AC* en *BC*.

Is $DS = DE = DC$?

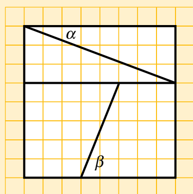


Uw oplossing binnen één maand ingezonden levert maximaal 5 ladderpunten op.

Recreatie

Oplossing 678

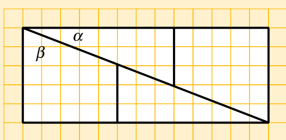
Een 8x8 vierkant was als volgt in vier stukken verknipt:



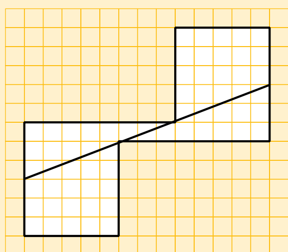
Als we nu de hoeken α en β bekijken, dan zien we:

$$\tan\alpha = \tfrac{3}{8} \Rightarrow \alpha = 20{,}6°$$
en $$\tan\beta = \tfrac{5}{2} \Rightarrow \beta = 68{,}2°$$

Als we nu de vier stukken anders neerleggen, dan lijkt het net alsof er een 5 × 13 rechthoek ontstaat. In werkelijkheid is dat niet zo omdat $\alpha + \beta < 90°$. Dus langs 'de diagonaal' is een opening aanwezig met een oppervlakte van 1 vierkantje.



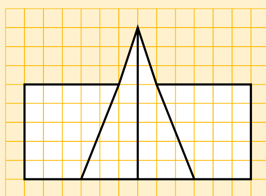
Door de stukken anders neer te leggen, lijkt het net alsof er een oppervlakte van 63 vierkantjes wordt bedekt. In de puzzelliteratuur kom je meestal de volgende figuur tegen:



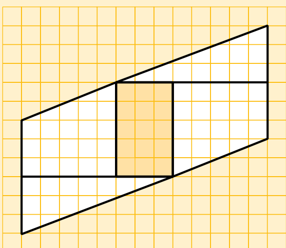
De meeste inzenders zonden de linker figuur in.

Dat recreatielezers creatief zijn moge blijken uit de volgende inzendingen:

Jan Wilhelm (20), Zeist
Hans Verdonk (63), Den Haag



Els Franken (15), Elburg



Met 63 punten is winnaar van een boekenbon van *ƒ* 25,–:

Hans Verdonk
C. Reinierszkade 103
2593 HM Den Haag

Hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Voor of op die datum dienen uw mededelingen bij de hoofdredacteur te zijn. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
3	04-12-97	23-10-97
4	15-01-98	20-11-97
5	19-02-98	08-01-98
6	19-03-98	05-02-98
7	01-05-98	19-03-98
8	18-06-98	07-05-98

Data in het nieuwe schooljaar

Wil iedereen die al data voor interessante bijeenkomsten heeft vastgelegd in het nieuwe schooljaar, deze zo snel mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Adres: zie colofon e-mail: cph@xs4all.nl

Nederlandse Netd@gen 1997
20 t/m 31 oktober 1997
WorldWideWeb in het onderwijs
Zie www-adres laatste kolom.

Teleac/NOT: Studiehuis
v.a. di. 21 oktober 1997: 21.00
Radio 5, vijf weken lang
v.a. zo. 2 november 1997: 11.05
TV 2, zes weken lang.
Voorproefje van en vragen over het Studiehuis.

Jaarvergadering en studiedag NVvW
za. 15 november 1997, Bilthoven
Thema: Veranderingen b(l)oeiend !?
Zie Euclides 73-1, p.19 e.v.

Conferentie Grafische Rekenmachine
wo. 19 november 1997, Utrecht
APS: 030 - 2856722

Wiskunde A-lympiade
vr. 28 november 1997
Freudenthal instituut
030 2611 611
Zie aankondiging p. 67

Wintersymposium
za. 3 januari 1998
'Sociale keuzetheorie'
Wiskundig genootschap
Aankondiging volgt later.

Masterclass Analyse RU Leiden
'Van afbeeldingen naar fractals.'
do. 22 / vr. 23 januari 1998
Voor 4, 5 en 6 vwo en docenten.
Mathematisch Instituut, RU leiden
hfinkeln@wi.leidenuniv.nl
Zie ook laatste kolom.

Mathematische Modelleercompetitie
za. 31 januari 1998
Voor 4, 5 en 6 vwo
Maastricht
Aankondiging volgt later.

Nationale Wiskunde Dagen
vr. 30 januari/za. 31 januari 1998
Freudenthal instituut:
030 2611 611
Zie aankondiging Euclides 72-8

Methodekeuze-conferenties
wo. 4 februari 1998
do. 5 februari 1998
wo. 11 februari 1998
do. 12 februari 1998
wo. 18 februari 1998
do. 19 februari 1998

Examendata
vbo B
do. 14 mei 1998
vbo/mavo C/D
di. 19 mei 1998
havo wiskunde A
vr. 15 mei 1998
havo wiskunde B
wo. 27 mei 1998
vwo wiskunde A
di. 19 mei 1998
vwo wiskunde B
vr. 15 mei 1998

Internetsites voor wiskundedocenten:

Nederlandse Netd@gen 1997
netdays.eun.org

Europees Scholennetwerk
www.eun.org

RU Groningen, didactiek
www.math.rug.nl/research/Teaching/main.htm

Nationale Wiskunde Dagen
www.fi.ruu.nl/nwd

Masterclass Analyse RU Leiden
www.wi.leidenuniv.nl/math/master

Van aardbeving tot zonnewijzer
Ideeën voor praktische opdrachten
www.ruu.nl/beta/handl/page2.html

Televisieprogramma's bij Prima Donna
buskruit.tros.com

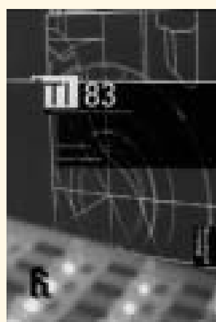
Mathesis
Virtuele wiskunde-onderwijsomgeving
www.textinfo.nl/mathesis

Advertentie TI-83

1998 Wolters-Noordhoff is er klaar voor

Een nieuwe reeks Wiskunde en ICT

Zojuist verschenen:



De TI-83, kennismaken en toepassen

Auteurs: Paul Drijvers en Michiel Doorman
ISBN 90 01 83290 3
gen 52 p met hulpkaart *f* 7,50



De Casio-CFX9850G, kennismaken en toepassen

Auteurs: Paul Drijvers, Michiel Doorman en Willem Hoekstra
ISBN 90 01 83291 1
gen 48 p met hulpkaart *f* 7,50

Beide boekjes, bedoeld voor havo- en vwo-leerlingen, zijn eerder in experimentele vorm op Profi-scholen uitgeprobeerd. In samenwerking met auteurs van *Netwerk* en *Moderne wiskunde* zijn door auteurs van het Freudenthal Instituut uit deze experimenten nieuwe boekjes geschreven, die passen bij het nieuwe examenprogramma havo-vwo en daarmee ook bij de **nieuwe edities** van *Netwerk* en *Moderne wiskunde*.
De boekjes bestaan uit twee onderdelen, geschreven in practicumvorm. Het eerste onderdeel is een kennismaking met de machine. Het tweede deel bestaat uit toepassingen. De boekjes zijn voorzien van handige hulpkaarten en zijn ook geschikt als naslagwerk.

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Wolters Noordhoff